بسم الله الرحمن الرحیم

مفاهیم و روشهای آماری (۲)

رشتهٔ حسابداری بازرگانی

گروه تحصیلی اداری مالی

زمینهٔ خدمات

شاخهٔ آموزش فنی وحرفه‌ای

شمارهٔ درس ۳۹۵۸

۵۱۹/۵ زهره‌بخش، محمدعلی
م ۷۸ ز مفاهیم و روشهای آماری (۲) / مؤلف : محمدعلی زهره‌بخش ــ تهران : شرکت چاپ و
۱۳۹۲ نشر کتابهای درسی ایران، ۱۳۹۲
۱۲۳ ص :مصور ــ (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شمارهٔ درس ۳۹۵۸)
متون درسی رشتهٔ حسابداری بازرگانی گروه تحصیلی اداری مالی، زمینهٔ خدمات
برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا : کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی رشتهٔ حسابداری بازرگانی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزشهای فنی وحرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش.
۱ آمار الف ایران وزارت آموزش و پرورش دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزشهای فنی‌وحرفه‌ای و کاردانش ب عنوان ج فروست

۱۳۹۲

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :

پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزشهای فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

پیام‌نگار (ایمیل) **info@tvoccd.sch ir**

وب‌گاه (وب‌سایت) **www.tvoccd.sch ir**

این کتاب براساس نتایج ارزشیابی‌های عکس‌العملی غیر تحریک شده از حوزهٔ آموزش توسط مؤلف و با نظر کمیسیون تخصصی در سال ۱۳۸۷ بررسی و تجدیدنظر شده است

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزشهای فنی و حرفه‌ای و کاردانش**

نام کتاب : **مفاهیم و روشهای آماری (۲) ـ ۴۶۹/۸**

مؤلف : **محمدعلی زهره‌بخش**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : **www.chap.sch ir**

صفحه‌آرا : **راحله زادفتح‌اله**

طراح جلد : **مریم کیوان**

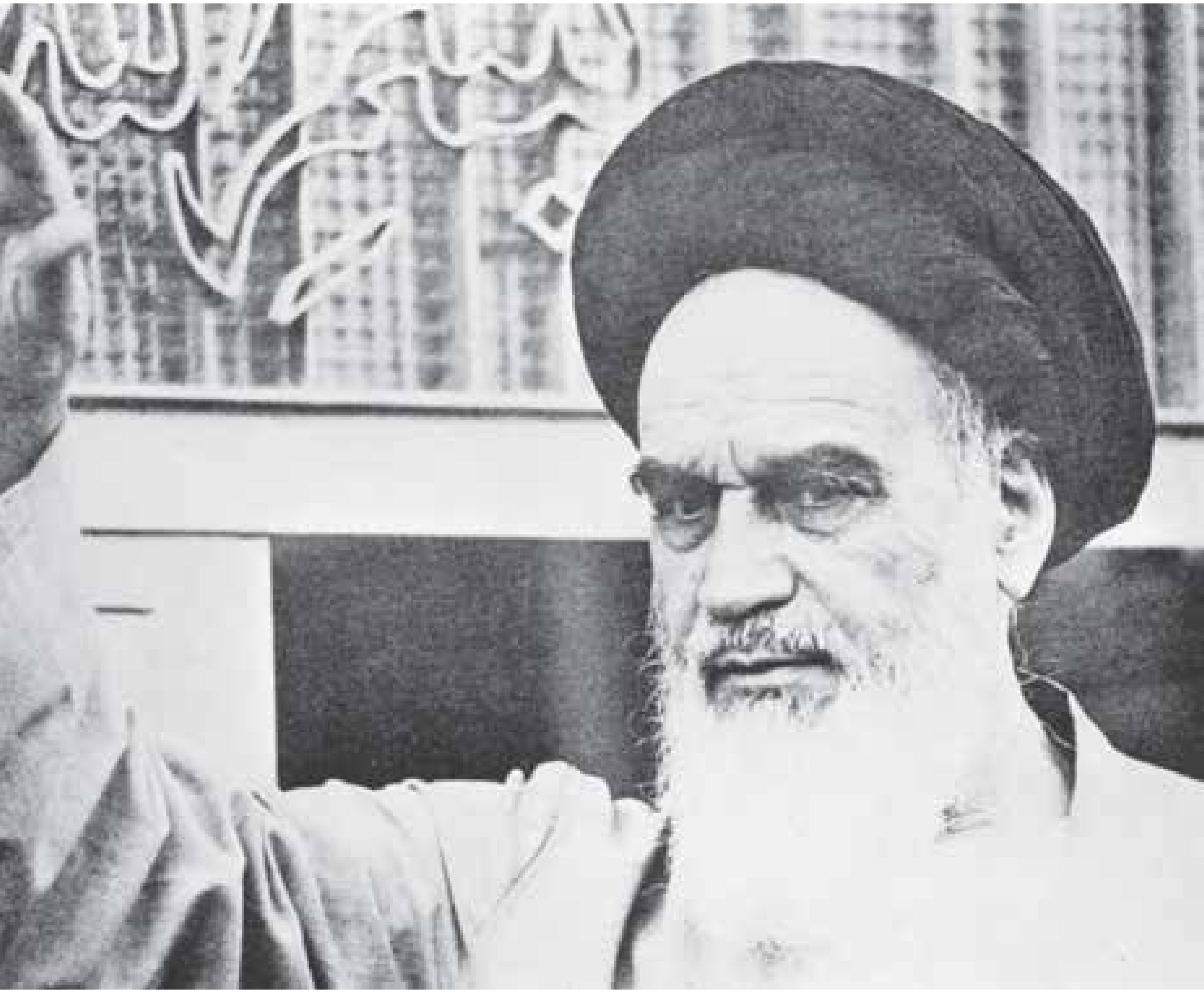
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار : **۱۳۹۲**

شابک ۲-۰۲۰۲-۰۵-۹۶۴ **ISBN 964-05-0202-2**



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتّکای به اجانب بپرهیزید.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

فهرست مطالب

مقدمه

برای آمار، تعاریف زیادی ارائه شده تا آنجا که می‌توان گفت، به تعداد انسانهایی که آمار را می‌شناسند، تعریف وجود دارد از ترکیب و تلفیق تعاریف مختلف آمار و استخراج وجوه مشترک آنها، می‌توان نتیجه گرفت که هر بررسی آماری دو هدف اصلی را تعقیب می‌کند :

۱ــ توصیف مشاهدات تجربی به دست آمده از نمونه‌های مناسب آماری

۲ــ تعمیم نتایج حاصل با درصد اطمینانی مشخص (= احتمال معیّن) به جامعه‌ای که نمونه مشاهده شده از آن انتخاب شده است

با همین استدلال، مباحث آمار را به دو بخش اصلی و عمده تقسیم می‌کنند :

۱ــ آمار توصیفی ۲ــ آمار استنباطی

شما دانش‌آموزان عزیز! در درس مفاهیم و روشهای آماری (۱) با آمار توصیفی آشنا شدید آمار استنباطی، شامل آن بخش از روشهای آماری است که با کمک داده‌های مشاهده شده، از نمونه‌های مناسب و استخراج شده از جوامع آماری، به استخراج و بیان نتایجی علمی و تعمیم نتایج مزبور به کل جامعه می‌پردازد تئوری نمونه‌گیری، تئوری برآورد (= تخمین)، آزمون فرضیه‌ها، سریهای زمانی، همبستگی و رگرسیون، بررسی شاخصهای اقتصادی و مفاهیمی از این قبیل، از جمله مقوله‌هایی است که در مبحث استنباط آماری، مورد مطالعه قرار می‌گیرند تئوری احتمالات، مانند پلی است که عبور از آمار توصیفی به آمار استنباطی را ممکن می‌سازد

در این کتاب با فصول و مباحث زیر آشنا خواهید شد :

۱ــ آنالیز ترکیبی ۲ــ تئوری احتمال ۳ــ همبستگی و ضریب رگرسیون

۴ــ سریهای زمانی ۵ــ اعداد شاخص

در پایان هر فصل، به منظور درک بیشتر مفاهیم، تعداد متناسبی تمرین ارائه شده است طبیعی است که بدون حل تمرینهای هر فصل و بحث در مورد آنها، دریافت کامل مفاهیم آن فصل، میسّر نخواهد بود سرانجام، در انتهای هر فصل تعدادی تست چهار گزینه‌ای آورده شده تا ابزاری مناسب برای خودآزمایی دانش‌آموزان عزیز باشد

چون برخی از مباحث این کتاب در کتابهای درسی سایر رشته‌ها توسط دیگر مؤلفان محترم

ارائه شده است حتی‌الامکان سعی شده تا هماهنگی لازم بین مطالب کتابهای مختلف مراعات گردد

امید است مطالب این کتاب برای شما دانش‌آموزان در جهت درک مفاهیم و حل مسائل آماری مفید واقع شود برای رسیدن به این مقصود لازم است مدرسان محترم مثالهایی ساده از زندگی روزمره و مربوط به رشته تحصیلی ارائه نمایند و دانش‌آموزان عزیز تمرینهای هر جلسه را در همان روز در فرصتی مناسب حل کنند

مؤلف

هدف کلی

ایجاد توانایی برای انجام محاسبات آنالیز ترکیبی، احتمال، همبستگی، سریهای زمانی و اعداد شاخص با تأکید بر جنبه‌های عملی و کاربردی مباحث مربوطه.

«عمل شمردن حالتها را خیلی ساده تصوّر نکنیم. در نظر داشته باشیم که ده نفر می‌توانند به ۳۶۲۸۸۰۰ طریق در یک صف جابجا شوند.»

فصل اوّل

آنالیز ترکیبی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ اصول شمارش (اصل جمع و اصل ضرب) را تعریف کند.

۲ــ مفهوم فاکتوریل را تعریف کند.

۳ــ محاسبات مربوط به فاکتوریل را انجام دهد.

۴ــ ابزارهای شمارش (تبدیل،ترتیب و ترکیب) را همراه با کاربرد آنها توجیه کند.

۵ــ مسائل مربوط به آنالیز ترکیبی را حل کند.

با توجه به اینکه بسیاری از مسائل احتمالات، متکّی بر شمردن تعداد عضوهای متعلّق به مجموعه‌های معیّن می‌باشند، در این فصل با مهمترین فنون شمارش آشنا خواهید شد تا در حل مسائل احتمالات بتوانید از آنها کمک بگیرید.

دو اصل مهم در شمارش

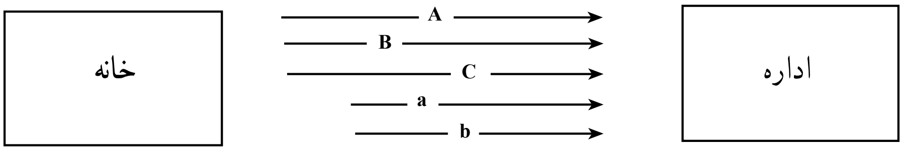
اصول شمارش بر پایه دو اصل بدیهی زیر بنا شده‌اند :

اصل جمع (اصل « یا »)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد، آنگاه A یا B را می‌توان به m + n طریق به انجام رساند.

مثال ۱ــ کارمندی برای رفتن از خانه به اداره، می‌تواند از یکی از سه خطّ اتوبوسرانی A،B یا C و یا یکی از خطوط مینی بوسرانی a یا b استفاده کند. این کارمند به چند صورت می‌تواند وسیلهٔ رفتن خود را برگزیند؟

جواب: ۵ = ۲ + ۳



مثال ۲ــ در یک سلف‌سرویس چهار نوع چلو و خورش و پنج نوع خوراک بدون برنج وجود دارد. یک مشتری به چند طریق می‌تواند غذای خود را برگزیند؟

$m + n = ۴ + ۵ = ۹$

اصل ضرب (اصل « و »)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد، A وB را می‌تواند به $m \times n$ طریق به انجام رساند.

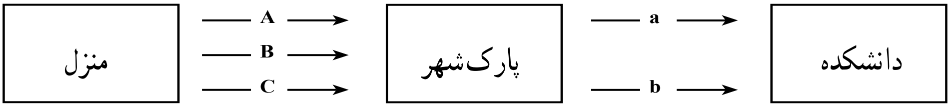
توجّه داشته باشیم که اصول جمع و ضرب برای بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم هستند و به‌طورکلی می‌توان گفت : برای تعیین تعداد راههای ممکن انجام یک امر که دارای چند مرحله متوالی است، باید تعداد راه‌حلهای ممکن هر مرحله را درهم ضرب کرد.

تذکّر: حرف ربط « یا » در اصلِ جمع و « و » در اصلِ ضرب نقش تعیین‌کننده‌ای در تشخیص این اصول خواهند داشت البته ممکن است مفاهیم « یا » و « و » در جمله مستتر باشند.

مثال ۳ــ دانشجویی برای رفتن از منزل به دانشکده باید ابتدا با استفاده از یکی از خطوط اتوبوسرانی A ، B یا C، خود را به پارک شهر برساند و سپس با استفاده از یکی از خطوط مینی‌بوسرانی

a یا b به دانشکده برود. این دانشجو، به چند طریق می‌تواند از منزل به دانشکده برود؟

جواب: $۳\times۲=۶$



در بسیاری از مسائل عملی، اصول جمع و ضرب به صورت توأم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال۴ـــ از بین چهار اقتصاددان و دو جامعه‌شناس و سه حسابدار، به چند طریق می‌شود، کمیته‌ای دو نفره تشکیل داد، به‌طوری که اعضای کمیته دارای یک نوع تخصص نباشند؟

جواب: این کمیته را می‌توان به $۴\times۲=۸$ طریق از بین اقتصاددانان و جامعه‌شناسها یا به $۴\times۳=۱۲$ طریق از بین اقتصاددانان و حسابدارها، یا به $۲\times۳=۶$ طریق از بین جامعه‌شناسها و حسابدارها و در نتیجه به: $۸+۱۲+۶=۲۶$ طریق متمایز تشکیل داد.

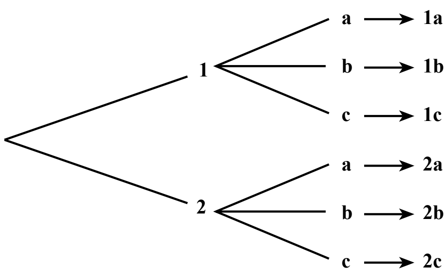
خودآزمایی ـــ دو مثال برای اصل جمع و دو مثال برای اصل ضرب بیان کنید.

به نظر شما کدام اصل بیشتر کاربرد دارد؟

مثال ۵ـــ احمد پنج شلوار و چهار کت دارد. او به چند طریق می‌تواند کت و شلوار بپوشد؟

$m\times n=۵\times۴=۲۰$

برای درک بیشتر اصل ضرب می‌توان از روش درختی (= شاخه‌ای) نیز کمک گرفت. مثلاً اگر $A=\{۱,۲\}$ ، $B=\{a,b,c\}$ باشد، حاصلضرب $A\times B$ طبق اصل ضرب برابر $۲\times۳=۶$ و طبق روش درختی این شش عضو به‌صورت زیر خواهند بود :



توجّه داشته باشیم که در اصل ضرب گاهی اوقات انتخابها وابسته به انتخابهای قبلی هستند و گاهی اوقات انتخابها، مستقل از انتخابهای قبلی خواهند بود. مثلاً اگر بخواهیم با ارقام ۱، ۲، ۳ و

۴ اعداد سه رقمی بدون تکرار را بنویسیم، خواهیم داشت :

$\boxed{۴ \mid ۳ \mid ۲} = ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

امّا اگر هدف ما نوشتن همه اعداد سه رقمی «با تکرار یا بدون تکرار» باشد، خواهیم داشت :

$\boxed{۴ \mid ۴ \mid ۴} = ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$

توجّه دارید که در نوشتن اعداد سه رقمی بدون تکرار، انتخابها وابسته به انتخابهای قبلی، امّا در مورد اعداد سه رقمی با تکرار، انتخابها مستقل از انتخابهای قبلی هستند.

فاکتوریل[1] چیست؟

حاصلضرب اعداد صحیح و مثبت ۱،۲،۳،...،n را فاکتوریل n گویند،که با نماد n! نشان داده می‌شود. با توجه به تعریف بالا می‌توان نوشت :

(فرمول۱)

$$\boxed{۱ \times ۲ \times ۳ \times \quad \times (n-۱) \times n = n! \quad \text{یا} \quad n! = n(n-۱)(n-۲) \times \quad \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

به بیان دیگر می‌شود گفت : n! یعنی ضرب کردن n در همه اعداد صحیح متوالی قبل از خودش تا یک.

مثلاً :

$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰ \qquad ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$

از ترکیب دو مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت که : $۶! = ۶ \times ۵!$

و حالت کلی این مطلب را، می‌توان به صورت فرمول ۲ بیان کرد :

(فرمول ۲) $\boxed{n! = n(n-۱)!}$

ضمناً !۰ و !۱ را مساوی یک در نظر می‌گیرند. (در ادامه این فصل دلیل این مطلب را خواهید دید.)

مثال۶ــ حاصلضرب اعداد زیر را به‌صورت فاکتوریل یک عدد طبیعی بنویسید.

۱ــ Factorial واژه فاکتوریل از واژه Factor به معنی عامل گرفته شده است.

$$\begin{array}{ccc} ۶ & \times & ۲۰= \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} ۲۴ & \times & ۳۰= \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$۱\times۲\times۳\times۴\times۵ = ۵! \qquad ۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶ = ۶!$$

$$۳!\times۵! = ۶\times۵! = ۶!$$

مثال ۷ــ کسرهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{۴!}{۶!} = \frac{۴!}{۶\times۵\times۴!} = \frac{۱}{۳۰}$$

$$\frac{۱۰!\ ۸!}{۱۲!\ ۷!} = \frac{۱۰!\times۸\times۷!}{۱۲!\ ۷!} = \frac{۱۰!\times۸}{۱۲\times۱۱\times۱۰!} = \frac{۲}{۳۳}$$

$$\frac{a!}{(a-۲)!} = \frac{a(a-۱)(a-۲)!}{(a-۲)!} = a^۲ - a$$

$$\frac{a!(b-۱)!}{b!(a-۱)!} = \frac{a(a-۱)!\ (b-۱)!}{b(b-۱)!\ (a-۱)!} = \frac{a}{b}$$

نکته: توجه داشته باشید که اعداد را به صورت فاکتوریل نمی‌توان با هم‌دیگر جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم کرد. بلکه ابتدا باید هر عدد فاکتوریل دار را به صورت یک عدد صحیح در آورده، سپس اعداد صحیح را در عملیات چهار عمل اصلی شرکت دهیم. مثلاً :

$$۳!\times۲! \neq ۶!$$

$$۳! = ۶$$

$$۲! = ۲$$

$$۳!\times۲! = ۶\times۲ = ۱۲$$

ابزارهای شمارش

منظور از «ابزارهای شمارش» که گاهی (آنالیز ترکیبی) نامیده می‌شوند، سه ابزار تبدیل، ترتیب و ترکیب می‌باشند که بر پایهٔ اصول شمارش (= اصلهای جمع و ضرب) و تعریف فاکتوریل، ساخته و پرداخته شده‌اند.

تبدیل[1] (جایگشت)

جابجا کردن n شیء متمایز را به صورتهای مختلف در کنار هم، تبدیل n شیء گویند. که با نماد P_n نشان داده می‌شود.

برای تعیین تعداد کل تبدیلهای n شیء، می‌توان n خانه (حُجره) را درنظر گرفت که برای پر کردن خانه اوّل یکی از n شیء و پس از آن، برای پر کردن خانه دوم یکی از $n-۱$ شیء باقیمانده و... و سرانجام برای پر کردن خانهٔ آخر، فقط یک شیء باقیمانده را می‌توان مورد استفاده قرار داد و طبق اصل ضرب، پر کردن این خانه‌ها به :

$$n(n-۱)(n-۲)\times\ldots\times۱$$

طریق، امکان‌پذیر خواهد بود.

خانه آخر		خانه سوم	خانه دوم	خانه اول
به (۱) طریق	و . . . و	به $n-۲$ طریق	به $n-۱$ طریق	به n طریق

به کمک این استدلال می‌توان نوشت :

(فرمول ۳) $\boxed{P_n = n!}$

برای درک بیشتر فرمول ۳ (فرمول تبدیل) به یک مثال دیگر توجه کنید : فرض کنید در یک ردیف از یک سالن سخنرانی، چهار صندلی در کنار هم قرار دارد و قرار است چهار نفر از بیرون وارد سالن شده، روی صندلیها بنشینند. نفر اولی که وارد می‌شود، می‌تواند به چهار طریق جای خود را انتخاب کند. نفرات دوم، سوم و چهارم به‌ترتیب می‌توانند به ۲،۳ و ۱ طریق صندلی خود را برگزینند. اگر انتخاب محلّ نشستن را توسط هر یک از این چهار نفر، یک عمل جداگانه درنظر بگیریم، عمل اول به ۴ طریق، عمل دوم به ۳ طریق، عمل سوم به ۲ طریق و عمل چهارم به ۱ طریق امکان‌پذیر می‌باشد و طبق اصل ضرب، این چهار عمل را به $۱\times۲\times۳\times۴$ طریق، می‌توان انجام داد. با توجه به تعریف فاکتوریل که حاصلضرب اعداد صحیح و مثبت ۳،۲،۱ و ۴ را چهار فاکتوریل (=۴!) می‌نامیم، داریم :

$$P_۴ = ۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$$

مثال ۸ـــ پنج پروندهٔ مالیاتی مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید؟

---

۱ ـ Permutation

$$P_{۵} = ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

مثال ۹ــ کتابداری می‌خواهد شش کتاب متفاوت با نامهای مختلف را در یک قفسه کتابخانه بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی از راست به چپ، بچیند. این کار را به چند صورت می‌تواند انجام دهد؟

$$P_{۶} = ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$$

تبدیلهای حلقوی ــ اگر n شیء مختلف را بخواهیم روی یک حلقهٔ بسته (مثلاً روی محیط یک دایره) به شکلهای مختلف قرار دهیم، تعداد حالتها، از رابطهٔ $(n-۱)!$ به‌دست می‌آید. علت این امر آنست که اگر تمامی n شیء مزبور که بر محیط بسته‌ای چیده شده‌اند، در یک جهت تغییر مکان دهند، صورت جدیدی پدیدار نخواهد شد، لیکن اگر یکی از n شیء را ثابت نگه داریم و $n-۱$ شیء باقیمانده را جابجا کنیم صورتهای تازه‌ای فراهم می‌شود. با این توضیح، می‌توان نوشت :

(فرمول ۴)* $\boxed{{}^{*}P_n = (n-۱)!}$

مثال ۱۰ــ پنج نفر اعضای شورای یک دادگاه، به چند صورت می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

$$^{*}P_{۵} = (۵-۱)! = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

تبدیلهای با تکرار ــ اگر از n شیء مفروض، $r_۱$ شیء از یک نوع، $r_۲$ شیء از نوع دیگر و... و سرانجام r_k شیء از نوع دیگری باشند، به‌طوری‌که $r_۱ + r_۲ + \quad + r_k = n$ باشد، تعداد تبدیلهای کل آنها از رابطهٔ $\frac{n!}{r_۱!r_۲! \quad r_k!}$ تعیین خواهد شد. به بیان دیگر، هرگاه یک مجموعه n عضوی به k زیرمجموعه $r_۱, r_۲, \quad , r_k$ عضوی افراز شده باشد، تعداد تبدیلهای ممکن از فرمول ۵ معلوم خواهد شد.

(فرمول ۵)* $\boxed{{}^{*}P_n = \frac{n!}{r_۱!r_۲! \quad r_k!}}$

برای روشن شدن مطلب و درک فرمول۵ به مثال عینی زیر توجه کنید.

فرض کنید می‌خواهیم با حروف به کار رفته در کلمه « دبیر »، بدون توجه به معنی کلمات ساخته شده، کلمات چهار حرفی بسازیم، چون حروف به کار رفته در کلمه «دبیر»، متفاوت هستند، طبق تعریف تبدیل از رابطهٔ :

$$P_{۴} = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

---

* وجود علامت ستاره در برخی از فرمولها، به معنی استثنایی بودن آن موارد است.

تعداد کلمات را می‌توان معلوم کرد. اما اگر بخواهیم با حروف به کار رفته در کلمهٔ «دیدم» کلمات چهار حرفی بسازیم، چون جابجا کردن دو حرف «د»، تغییری در کلمات به‌وجود نمی‌آورد، لذا باید !۴ را بر!۲ تقسیم کرد (در حقیقت با این عمل !۲ ضرب اضافی به عمل آمده در !۴ را به خاطر حرف «د» جبران خواهیم کرد). در این صورت باید بنویسیم :

$$*P_{۴} = \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$$

و اگر در کلمات دیگر، به‌جای یک دسته حروف تکراری، چند دسته حروف تکراری داشته باشیم، (نظیر کلمه ساسانیان که دارای دو حرف «س» و سه حرف «الف» و دو حرف «ن» می‌باشد.)باید $n!$ را بر فاکتوریل هر یک از دسته‌های تکراردار، تقسیم کنیم. مثلاً برای واژهٔ (ساسانیان) تعداد کلمات هشت حرفی از رابطهٔ $\frac{۸!}{۲!۳!۲!}$ معلوم خواهد شد.

مثال ۱۱ــ با حروف به کار رفته در واژه «بابا خانیان» چند کلمهٔ ده حرفی می‌توان نوشت؟

$$*P_{۱۰} = \frac{۱۰!}{۲!۴!۲!} = ۳۷۸۰۰$$

مثال ۱۲ــ با ارقام به‌کار رفته در عدد **۳۴۳۳۴**، چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

$$*P_{۵} = \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$$

مثال ۱۳ــ به چند طریق متمایز می‌توان چهار خودکار آبی و پنج خودکار سبز و دو خودکار قرمز را در کنار هم چید؟

$$*P_{۱۱} = \frac{۱۱!}{۴!۵!۲!} = ۶۹۳۰$$

توجه داشته باشید که اگر این یازده خودکار به لحاظ تفاوتهایی که مثلاً در اندازه یا حجم یا اسم یا شماره آنها وجود دارد، متمایز بودند، به :

$P_{۱۱} = ۱۱! = ۳۹۹۱۶۸۰۰$ طریق می‌شد آنها را کنار هم چید.

ترتیب[۱]

تعریف ــ جابجا کردن r شیء از n شیء مختلف را $(r \le n)$ ترتیب r شیء از n شیء، یا ترتیب n شیء r به r گویند که با نمادهای A_n^r یا P_n^r نشان داده می‌شود.[۲] برای به‌دست آوردن

۱ـ Arrangement

۲ـ ترتیب را با نماد $P_{(n,r)}$ نیز نشان می‌دهند.

تعداد ترتیبهای r عنصری از n شیء مختلف، می‌توان n خانهٔ مختلف را در نظر گرفت که برای پر کردن خانه اول یکی از n شیء، پس از آن برای پر کردن خانهٔ دوم یکی از $n-۱$ شیء باقیمانده و برای پر کردن خانه سوم یکی از $n-۲$ شیء به جا مانده و... و سرانجام برای پر کردن خانهٔ r اُم یکی از $n-(r-۱)$ یا $n-r+۱$ شیء را در نظر گرفت:

خانه اول	خانه دوم	خانه سوم		خانه r اُم
با یکی از n شیئ	با یکی از $n-۱$ شیئ	با یکی از $n-۲$ شیئ	....	با یکی از $n-r+۱$ شیئ

حال اگر بخواهیم همهٔ این خانه‌ها را پر کنیم (بخواهیم تمام r عمل را انجام دهیم)، طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\boxed{P_n^r = n(n-۱)(n-۲)\times\ldots\times(n-r+۱)}$$ (فرمول ۶)

اگر رابطه بالا را یک‌بار در $(n-r)!$ ضرب و یک‌بار بر $(n-r)!$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$P_n^r = \frac{n(n-۱)(n-۲)\times \quad \times(n-r+۱)\times(n-r)!}{(n-r)!}$$

ضمناً طبق فرمول ۱ می‌توان نوشت:

$$n(n-۱)(n-۲)\times \quad \times(n-r+۱)\times(n-r)! = n!$$

بنابراین فرمول ۶ را به‌صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\boxed{P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$ (فرمول ۷)

تذکّر: به کمک فرمولهای تبدیل و ترتیب، می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد:

طبق فرمول ترتیب (۱) $P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{۰!}$

طبق فرمول تبدیل (۲) $P_n^n = n!$

نتیجه (۳) $\frac{n!}{۰!} = n!$

و رابطهٔ (۳)، زمانی با معنی خواهد بود که: $\boxed{۰! = ۱}$ باشد.

با بیان این تذکّر، متوجّه می‌شویم که ترتیب، حالت خاصّی از تبدیل است که در آن $r \leq n$ است. چنانچه $r = n$ باشد، اصطلاح تبدیل و درصورتی که $r < n$ باشد، اصطلاح ترتیب به‌کار برده می‌شود.

برای تفهیم بهتر فرمول ترتیب، به یک مثال عینی توجه کنید :

فرض کنید در یک ردیف از یک سالن سخنرانی، ۸ صندلی وجود دارد و قرار است ۳ نفر وارد سالن شوند و روی صندلیها بنشینند.

نفر اول می‌تواند به ۸ طریق جای خود را برگزیند، نفر دوم به ۷ طریق و نفر سوم به ۶ طریق می‌توانند جاهای خود را انتخاب کنند، طبق اصل ضرب، این سه نفر می‌توانند به $۸ \times ۷ \times ۶$ طریق جاهای خود را برگزینند و با این ترتیب، می‌توان نوشت :

$$P_{۸}^{۳} = ۸ \times ۷ \times ۶ = n(n-۱)(n-r+۱)$$

و این همان فرمول ۶ است، از طرفی می‌توان نوشت :

$$P_{۸}^{۳} = ۸ \times ۷ \times ۶ = \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸!}{(۸-۳)!}$$

و این نیز همان فرمول ۷ می باشد.

مثال ۱۴ــ یک خانوادهٔ چهار نفری به چند طریق می‌توانند سه به سه در کنار هم، عکس بگیرند؟

$$P_{۴}^{۳} = \frac{۴!}{(۴-۳)!} = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

مثال ۱۵ــ در یک شرکت، ۱۰ کارمند کار می‌کنند، به چند صورت می‌توان از بین آنها یک شورای ۳ نفره تشکیل داد که شامل یک رئیس شورا، یک معاون شورا و یک بازرس شورا باشد؟

$$P_{۱۰}^{۳} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$$

ترتیبهای با تکرار ــ هرگاه تکرار یک یا چند شیء از n شیء در ترتیبهای ساخته شده مجاز باشد، «ترتیب با تکرار» حاصل خواهد شد. فرض کنید شما می‌خواهید با استفاده از ارقام ۳،۲،۱و۴، تمام اعداد سه رقمی ممکن را بسازید. برای تعیین تعداد آنها، از استدلال زیر استفاده خواهید کرد :

جای صدگان	جای دهگان	جای یکان
به چهار طریق	به چهار طریق	به چهار طریق

زیرا در هر یک از خانه‌های یکان، دهگان و صدگان می‌توان ۱ یا ۲ یا ۳ و یا ۴ را قرار داد و طبق اصل ضرب، هر سه جا را می‌توان به $۴\times۴\times۴$ یا $۴^۳$ طریق پرکرد.

به طور کلی فرمول ۸ را برای ترتیبهای با تکرار به‌کار می‌برند :

(فرمول ۸)* $\boxed{{}^*P_n^r = n^r}$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فرمول ۸ درحالتی است که انتخابهای بعدی مستقل از انتخابهای قبلی هستند.

مثال زیر تفاوت ترتیبهای بدون تکرار و با تکرار را نشان می‌دهد.

مثال ۱۶ــ دو خودکار آبی و مشکی(A و M) را به چند صورت می‌توان به ۳ نفر داد؟ چنانچه :

الف) دادن بیش از یک خودکار به هر نفر مجاز نباشد.

ب) دادن بیش از یک خودکار به هر نفر مجاز باشد.

حل: موضوع بند « الف »، ترتیبهای بدون تکرار است.

عمل دوم		عمل اول
خودکار مشکی را به یکی از ۲نفر باقیمانده می‌توان داد.	آنگاه $\longrightarrow$	خودکار آبی را می‌توان به یکی از ۳ نفر داد.
به دو طریق		به سه طریق

و طبق اصل ضرب، دادن دو خودکار متمایز به سه نفر از رابطهٔ $۶ = ۲\times۳$ معلوم می‌شود. امّا موضوع بند « ب »، مربوط به ترتیبهای با تکرار خواهد بود :

خودکارمشکی را هم می‌توان به یکی از ۳ نفر داد.	آنگاه $\longrightarrow$	خودکار آبی را می‌توان به یکی از ۳ نفر داد.

و طبق اصل ضرب، هر دو عمل را به $۹ = ۳\times۳$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال ۱۷ــ با ارقام ۳،۲،۱،۰ و ۵ چند عدد دو رقمی با تکرار مجاز ارقام، می‌توان نوشت؟

جای یکان		جای دهگان
با همه ارقام	و آنگاه $\longleftarrow$	با همه ارقام بجز صفر
به پنج طریق		به چهار طریق

لذا طبق اصل ضرب، داریم : $P_۵^۲ = ۴\times۵ = ۲۰$

تذکّر: بهتر است مسائل تبدیل و ترتیب را با کمک اصل ضرب حل کنیم تا با سرعت بیشتری به جواب برسیم. مثلاً اگر در مثال ۱۷ گفته شود که چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت با کمک اصل ضرب به صورت زیر عمل خواهیم کرد :

	جای یکان	جای دهگان
$P_{۵}^{۲} = ۴ \times ۲ = ۸$	$\boxed{\text{فقط صفر یا ۲}}$	$\boxed{\text{همه ارقام بجز صفر}}$
	به دو طریق	به چهار طریق

در حالی که اگر بخواهیم این مثال را ابتدا با کمک فرمولِ ترتیبهای با تکرار حل کنیم، خواهیم داشت :

کلّ اعداد $\quad P_n^r = n^r \Rightarrow P_{۵}^{۲} = ۵^{۲} = ۲۵$

سپس باید اعدادی را که سمت چپ‌شان صفر است و نیز اعدادی را که یکانشان فرد است، محاسبه کرده، از کلّ اعداد کنار بگذاریم.

آن تعداد که سمت چپشان صفر است. $\quad ۲۵ \times \frac{۱}{۵} = ۵$

آن تعداد که سمت چپشان صفر نیست. $\quad ۲۵ - ۵ = ۲۰$

آن تعداد که یکانشان فرد است. $\quad ۲۰ \times \frac{۳}{۵} = ۱۲$

آن تعداد که یکانشان زوج است. $\quad ۲۰ - ۱۲ = ۸$

مشاهده می‌کنید که راه‌حلّ اول (استفاده از اصل ضرب) بسیار کوتاه‌تر از راه‌حل دوم (استفاده از فرمول ترتیبهای با تکرار و منطق ریاضی) می‌باشد.

نکته: در مسایلی که ترتیب قرارگرفتن اشیاء مورد توجه باشد، یا از تبدیل استفاده خواهیم کرد و یا از ترتیب. مانند نوشتن کلمات با حروف و یا نوشتن اعداد با ارقام. حال اگر کل اشیاء بخواهند جابه‌جا شوند فرمول «تبدیل» کاربرد پیدا می‌کند و اگر بخشی از کل اشیاء بخواهند جابه‌جا شوند، دستور «ترتیب» مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ترکیب[1]

تعریف ــ درهم آمیختن r شیء از n شیء مختلف را ترکیب r شیء از n شیء گویند، که با نمادهای C_n^r یا $\binom{n}{r}$ نشان داده می‌شود.[2]

به بیان دیگر می‌توان گفت که ترکیب، انتخابی از اشیا را گویند که در آن، ترتیب قرار گرفتن اجزا در کنار هم مهمّ نباشد، بلکه با هم بودن اجزا مَدّ نظر باشد.

در ترکیب (برخلاف ترتیب) جابجا شدن اشیا در هر نمونه r عضوی، نمونهٔ تازه‌ای فراهم نمی‌کند. با این ترتیب می‌توان ترکیب را معادل مفهوم « زیر مجموعه» در ریاضیّات دانست. برای تشخیص تفاوت بین ترتیب و ترکیب و رابطهٔ آنها به یک مثال توجه کنید.

حروف B،A و C را درنظر بگیرید. اگر بخواهید کلمات دو حرفی بدون تکرار را که می‌توان با این حروف ساخت، بنویسید، با موضوع ترتیب روبرو خواهید بود و خواهید داشت :

$$AB-AC-BC-BA-CA-CB$$

$$P_{۳}^{۲}=۳\times ۲=۶$$

ترتیبهای دو شیء از سه شیء مختلف

توجه دارید که در این صورت AB و BA با هم فرق دارند حال اگر همان سه حرف را نمایندهٔ ۳ رنگ مثلاً آبی (A)، بنفش (B)، سرخ (C) در نظر بگیرید و بخواهید رنگهایی مرکب از دو رنگ مختلف بسازید، موضوع مسأله به «ترکیب» مربوط می‌شود :

$$\left.\begin{array}{l} \text{بنفش و آبی} \leftarrow AB \\ \text{آبی و سرخ} \leftarrow CA \\ \text{بنفش و سرخ} \leftarrow CB \end{array}\right\} \text{ترکیبهای دو عضوی از یک مجموعهٔ سه عضوی}$$

توجه دارید که در این صورت AB و BA یک معنی خواهند داشت، زیرا رنگهای آبی و بنفش، همان رنگهای بنفش و آبی هستند. مشاهده می‌شود که **تعداد ترکیبها همواره به اندازهٔ $\frac{۱}{r!}$ تعداد ترتیبها خواهند بود.** و با کمک همین استدلال می‌نویسیم :

$$C_n^r=\frac{۱}{r!}\times P_n^r=\frac{۱}{r!}\times\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

---

۱ ــ Combination

۲ــ مفهوم ترکیب را با نماد $C_{(n,r)}$ نیز نشان می‌دهند.

و با این ترتیب، فرمول زیر برای تعیین تعداد ترکیبها ساخته خواهد شد :

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \quad ، \quad n \geq r \qquad \text{(فرمول۹)}$$

نکته: برای تعیین تعداد ترکیبها، می‌توانید ابتدا تعداد ترتیبها را محاسبه کرده، نتیجه را بر $r!$ تقسیم نمایید.

مثال ۱۸ـــ به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ حساب جاری در یک بانک، به‌طور تصادفی دو حساب جاری را به‌عنوان یک نمونه، انتخاب کرد؟

$$C_{۱۰}^{۲} = \frac{۱۰!}{۲!۸!} = ۴۵$$

مثال ۱۹ـــ دبیر حسابداری در امتحان آخر ترم ۲۰ سؤال به دانش‌آموزان خود داده است که آنها به‌طور دلخواه به ۱۸ سؤال پاسخ دهند. دانش‌آموزان به چند طریق می‌توانند سؤالات خود را برگزینند؟

$$C_{۲۰}^{۱۸} = \frac{۲۰!}{۱۸!۲!} = ۱۹۰$$

مثال ۲۰ـــ تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی را که می‌توان از مجموعهٔ :
$\{a, ۲$ ، ج، $\square, \Delta, 8\}$ ساخت، معلوم کنید.

$$C_{۶}^{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶} = ۲۰$$

خودآزمایی (۱) ـــ ترکیبهای زیر را حل کرده، برای هر کدام یک قانونمندی ثابت بیان کنید :

$$C_{۵}^{۰}, C_{۵}^{۱}, C_{۵}^{۲}, C_{۵}^{۳}, C_{۵}^{۴}, C_{۵}^{۵}$$

خودآزمایی(۲) ـــ ترکیبهای عنوان شده در خودآزمایی (۱) را محاسبه کرده، مجموع آنها را به‌صورت توانی از ۲ بنویسید.

روابط زیر شما را در پیداکردن جواب ترکیب‌ها، کمک می‌کند :

۱) $C_n^{۰} = C_n^n = ۱$

۲) $C_n^{۱} = C_n^{n-۱} = n$

۳) $C_n^{۲} = C_n^{n-۲} = \dfrac{n(n-۱)}{۲!}$

$$۴)\ C_n^{۳} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}$$

$$۵)\ C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$۶)\ C_n^{۰} - C_n^{۱} + C_n^{۲} - C_n^{۳} + \quad C_n^n = ۰$$

ترکیبهای با تکرار ــ اگر در n شیء مورد نظر، برخی از اشیا مثل هم و یکسان باشند و بخواهیم ترکیبهایی rتایی بسازیم، در برخی از ترکیبها اشیای تکراری خواهیم داشت. (مثلاً AA می‌تواند یک ترکیب دو حرفی با تکرار از مجموعهٔ حروف A و A وB و C وD باشد.) به چنین مواردی ترکیبهای با تکرار گفته می‌شود.

چون اثبات و توضیح فرمول ترکیبهای با تکرار، خارج از برنامه درسی است، لذا این فرمول را بدون ذکر دلیل نشان می‌دهیم :

$$\boxed{{}^{*}C_{(n+r-۱)}^{r} = \frac{(n+r-۱)!}{r!(n-۱)!}} \qquad \text{(فرمول ۱۰)}$$

مثال ۲۱ــ به چند طریق می‌توان از بین ۵ فوتبالیست، یک دروازه‌بان و یک کاپیتان انتخاب کرد؟ با توجّه به این که یک فرد نیز می‌تواند هر دو کار را انجام دهد.

$$C_{(۵+۲-۱)}^{۲} = \frac{(۵+۲-۱)!}{۲!(۵-۱)!} = \frac{۶!}{۲!۴!} = \frac{۶\times ۵}{۲} = ۱۵$$

توضیح: در مثال بالا اگر قرار بر این باشد که از بین پنج فوتبالیست دو نفر را برای وظایف مختلف (مثلاً دروازه‌بانی و دفاع) انتخاب کنیم، تعداد حالتهای انتخاب از ترکیبهای بدون تکرار به‌صورت $C_۵^۲ = ۱۰$ معلوم می‌شوند. توجّه دارید که اختلاف در این دو حالت ۵ مورد است. $(۱۵-۱۰=۵)$ که این موارد به حالتهایی برمی‌گردد که هر یک از پنج فوتبالیست در حالت اول می‌توانستند هم دروازه‌بان باشند و هم کاپیتان، درحالی که در حالت دوم دروازه‌بان و دفاع حتماً باید دو نفر مختلف باشند.

تمرینهای فصل اوّل

۱ــ اصل « جمع » و اصل « ضرب » را همراه با ذکر مثال توضیح دهید.

۲ــ فاکتوریل را تعریف کنید.

۳ــ تساوی مقابل را با استفاده از آنالیز ترکیبی توجیه کنید : $۰!=۱!=۱$

۴ــ با همه حروف به کار رفته در کلمه « مالیات »، چند کلمهٔ شش حرفی می‌شود نوشت؟

۵ــ کسرهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{۱۰!}{۱۲!},\ \frac{۵!۸!}{۷!۱۰!},\ \frac{a!}{(a-۲)!},\ \frac{(a+۲)!}{(a-۲)!},\ \frac{(n+۱)!}{n!}$$

۶ــ هفت نفر افراد یک خانواده به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟ این افراد به چند طریق می‌توانند در دو اتومبیل به ظرفیتهای ۴ نفره و ۳ نفره سوار شوند؟

۷ــ اگر تکرار ارقام در اعداد مجاز باشد، با ارقام ۵،۳،۲،۱ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌شود نوشت؟ چند تای آنها زوج است؟

۸ــ درستی تساویهای زیر را نشان دهید.

۱) $C_n^n = C_n^{\circ}$ ۲) $C_n^r = \frac{P_n^r}{r!}$

۹ــ از ده کارمند مرد و ۵ کارمند زن شاغل در یک شرکت، به چند صورت می‌شود یک شورای چهار نفره انتخاب کرد؟ اگر بخواهیم دو نفر از اعضای شورا مرد و دو نفر دیگر آن زن باشند، این عمل را به چند طریق می‌توان انجام داد؟

۱۰ــ در یک امتحان، ۱۲ سؤال در اختیار دانش‌آموزان قرار داده شده است که باید ۱۰ سؤال را به دلخواه انتخاب کرده، حل کنند، چنانچه مجبور باشند سؤالات (۱) و (۲) را حتماً انتخاب کنند این عمل را به چند طریق می‌توانند انجام دهند؟

۱۱ــ شش نفر افراد شاغل در حسابداری یک اداره، به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

۱۲ــ به چند صورت می‌توان پنج پروندهٔ مالی و چهار پروندهٔ اداری را در یک قفسه چید، به‌طوری که پرونده‌های مالی در سمت راست باشند؟

۱۳ــ حاصل عبارت $P_n^{n-۱}$ را معلوم کنید.

۱۴ــ اگر تعداد ترتیبهای x شیء از پنج شیء، x برابر تعداد ترتیبهای $x-۱$ شیء از پنج شیء باشد، مقدار x را به‌دست آورید.

۱۵ــ در یک آزمون ۱۰ سؤال ریاضی و ۸ سؤال آمار داده شده که دانش‌آموزان باید به ۱۲ سؤال از آن‌ها پاسخ دهند. معلوم کنید دانش‌آموزان به چند طریق می‌توانند سؤالات خود را انتخاب کنند، اگر بخواهیم به نیمی از سؤالات آمار پاسخ داده باشند؟

۱۶ــ با حروف کلمه حسابداری چند کلمه مختلف می‌شود، نوشت؟

۱۷ــ به چند طریق می شود از بین ۱۰ نفر افراد یک شرکت، شورایی شامل یک رئیس، یک منشی و یک حسابدار انتخاب کرد؟

۱۸ــ در یک هتل سه اطاق خواب وجود دارد که یکی از آنها سه نفره و دوتای دیگر دو نفره هستند. مدیر این هتل هفت مسافر را به چند طریق می‌تواند در اطاقهای مختلف استقرار دهد.

۱۹ــ در یک کشور اروپایی پلاکهای اتومبیل‌ها را با استفاده از دو حرف الفبا در سمت چپ و یک عدد چهار رقمی در سمت راست تنظیم می‌کنند با توجه به این‌که ۲۶ حرف الفبا دارند، چند اتومبیل را می‌توانند پلاک بدهند؟

۲۰ــ به چند طریق می‌توانید هفت شمع مختلف را دور یک کیک دایره‌ای شکل برای یک فرد هفت ساله بچینید؟

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ـ حاصل عبارت $\frac{P_n^r}{P_{n+1}^{r+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n+1}$ ۲) $\frac{r}{n}$ ۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ ۴) $\frac{r+1}{n+1}$

۲ـ با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰، بدون تکرار ارقام می‌شود نوشت؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۳ـ یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد صورتهایی که در آنها عدد زوج آمده، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱

۴ـ سه کتاب ریاضی و ۲ کتاب اقتصاد را که با هم متفاوت‌اند، به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع، همواره کنار هم باشند؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۵ـ اگر ترکیب $\binom{a+b}{a} = m$ باشد، مقدار ترکیب $\binom{a+b}{b}$ کدامست؟[1]

۱) m ۲) bm ۳) am ۴) (a+b) m

۶ـ شخصی از میان ۱۰ کتاب خود، می‌خواهد دو کتاب را انتخاب کرده، به یکی از دوستانش هدیه کند. این عمل به چند صورت ممکن است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۲۰

۷ـ مجموعه $\{a , b , c , d , e\}$ چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۸ـ بین ۵ دبیر و ۴ دانش‌آموز، چند کمیتهٔ ۵ نفری مرکب از ۳ دبیر و ۲ دانش‌آموز می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۶۰

۱ـ نماد ترکیب را به دو صورت C_{a+b}^a یا $\binom{a+b}{a}$ می‌نویسند.

۹ــ اگر $P_n^{۲} = ۲۰$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۱۰ــ جواب معادله $C_x^{۲} = ۲x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱ــ در یک آزمون، ده سؤال دو جوابی صحیح یا غلط داده شده است. به چند طریق می‌شود به این سؤالات پاسخ داد؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۱۰^{۲}$ ۳) ۲×۱۰ ۴) ۱۰

۱۲ــ ده تیم فوتبال به چند طریق می توانند، دو به دو با هم مسابقه بدهند؟

۱) ۹۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۲۰

۱۳ــ با ارقام ۱، ۲، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۰ چند عدد دو رقمی بدون تکرار ارقام می‌شود نوشت؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۴ــ با حروف واژه «ترازنامه» چند کلمه هشت حرفی می‌شود نوشت؟

۱) $۸!$ ۲) $۸^{۸}$ ۳) ۸×۸ ۴) $\frac{۸!}{۲!}$

۱۵ــ پنج کارمند حسابداری یک شرکت به چند طریق می‌توانند دور یک میز کنفرانس بنشینند؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴

«حوادث آینده را نمی‌توان دقیقاً پیش‌بینی کرد،
امّا احتمال پیش‌آمدهای آینده را می‌توان محاسبه کرد.»

فصل دوم

احتمال (اندازه‌گیری مقدار شانس)

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ مفهوم مجموعه را با مثال بیان کرده، اجتماع، اشتراک و متمّم را تعریف کند.

۲ ــ آزمایش و فضای نمونه‌ای را تعریف کند.

۳ ــ پیشامد و انواع آن را تبیین نماید.

۴ ــ برداشتهای مختلف از احتمال را بیان کند.

۵ ــ اصول قراردادی (موضوعه) احتمال را برشمارد.

۶ ــ احتمال پیشامدها را بر مبنای فراوانی نسبی محاسبه کند.

۷ ــ احتمال متمّم یک پیشامد را محاسبه کند.

۸ ــ احتمال اجتماع و اشتراک دو پیشامد را محاسبه کند.

۹ ــ احتمال شرطی را برای پیشامدها محاسبه کند.

مقدمه

واژه « احتمال » را در صحبتهای روزمرّهٔ اشخاص زیاد شنیده‌اید. مثلاً وقتی هوا ابری است، می‌گویند : احتمال دارد که باران ببارد و یا فرضاً دانش‌آموزی که با جدیّت درس می‌خواند می‌گویند که :احتمال قبول شدن این دانش‌آموز در امتحانات **زیاد** است و در مورد دانش‌آموزی که وقت خود را بیهوده تلف می‌کند و کار مدرسه‌اش را جدّی نمی‌گیرد، می‌گویند : احتمال قبول شدن در امتحانات برای این دانش‌آموز **کم** است. به کار بردن واژه‌های « زیاد » و « کم » در کنار کلمهٔ احتمال این معنی

را می‌رساند که احتمال قابل اندازه‌گیری است. در این فصل، با مفهوم احتمال و چگونگی اندازه‌گیری آن آشنا خواهید شد.

امروزه از موضوع و تئوری احتمال در برنامه‌ریزیهای اقتصادی، اجتماعی تکنولوژیکی، سیاسی و بسیاری دیگر از پدیده‌های علمی نظیر زیست‌شناسی، روانشناسی، جامعه‌شناسی، آموزش و پرورش، پزشکی و غیره استفاده می‌شود.

نکته: به طور کلی احتمالات درباره پدیده‌هایی قابل طرح است که نمی‌توان نتیجه قطعی آنها را قبل از وقوع تعیین کرد. چنین پدیده‌هایی را پدیده‌های تصادفی می‌گویند.

مروری بر نظریهٔ مجموعه‌ها

در این قسمت برخی از مفاهیم اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها را، که در طرح مباحث احتمال مورد نیاز خواهد بود، یادآوری می‌کنیم.

مجموعه چیست؟

هر فهرست یا گردآورده‌ای از اشیا را « مجموعه » گویند. اشیایی را که مجموعه شامل آنها می‌شود عناصر یا اعضای مجموعه نامند. همه مجموعه‌های تحت بررسی، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ ثابتی به نام « مجموعهٔ جهانی » فرض می‌شوند. مجموعهٔ جهانی را غالباً با علامت و مجموعهٔ تهی، یعنی مجموعهٔ بدون عضو را با علامت . نشان می‌دهند.

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B عبارت است از مجموعه‌ای که عناصر آن یا به A تعلّق دارد، یا به B (و یا به هر دو). اجتماع A و B را با نماد A B نشان می‌دهند.

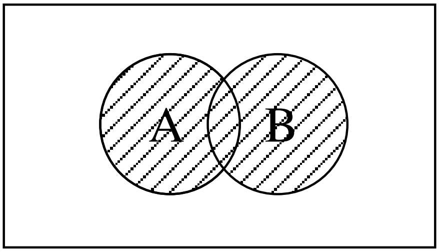
اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A وB که با نماد A B نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ای

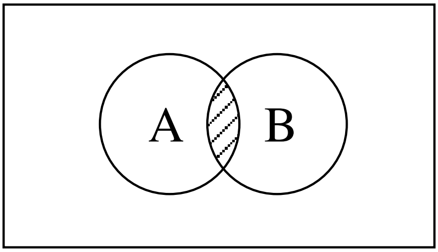
که عناصر آن هم به A تعلّق دارند و هم به B. اگر $A \quad B = \varnothing$ باشد، A و B را مجزّا از هم می‌نامند.

متمّم دو مجموعه (= مکمّل دو مجموعه)

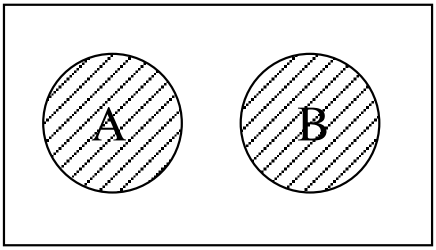
متمّم مطلق یک مجموعه مانند A از یک مجموعهٔ جهانی که با علامت A^c [1] یا A' نشان داده می‌شود، عبارت از مجموعه‌ای است که عناصر آن به A تعلّق ندارند. (گروهی از ریاضی‌دانان واژه مکمّل را به جای متمّم به کار می‌برند.) در نمودارهای ۱ تا ۴ که به نمودارهای وِن[2] شهرت دارند، مفاهیم بالا را به صورت هندسی نشان داده‌ایم.



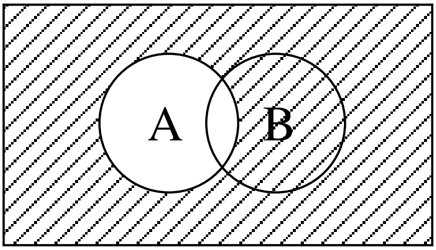
نمودار ۱ــ A B سایه خورده است.



نمودار ۲ــ A B سایه خورده است.



نمودار۳ــ A B سایه خورده است.



نمودار ۴ــ A^c سایه خورده است.

۱ــ حرف C بالای A از کلمه Complementary گرفته شده است که به معنای مکمل می‌باشد.

۲ــ وِن «Ven» دانشمندی است که اوّلین بار از این نمودارها استفاده کرده است.

زیر پیشامد (= زیر مجموعه)

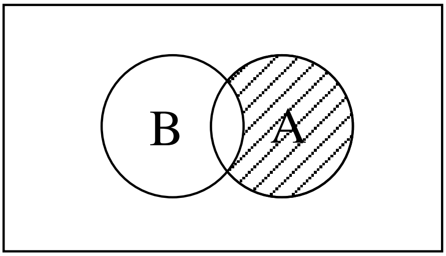
اگر هر پیشامد ساده که در A هست در B نیز وجود داشته باشد، می‌گویند A زیرپیشامد B است (که به‌صورت A . B نشان داده می‌شود.) توجه دارید که رخ دادن A باعث رخ دادن B می‌شود، اما لزوماً عکس آن درست نیست.

پیشامدهای برابر

اگر A زیرپیشامد B و B زیرپیشامد A باشد می‌گویند A و B برابراند. (که به‌صورت $A = B$ نشان داده می‌شود.)

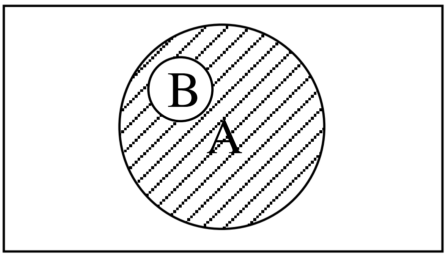
تفاضل دو پیشامد A و B

پیشامدی که از تمام پیشامدهای ساده که در A هستند ولی در B نباشند تشکیل شده باشد، تفاضل A از B نامیده شده و به‌صورت $A - B$ (A نه B) نشان داده می‌شود. به تصویر زیر نگاه کنید :



نمودار ۵ــ A–B هاشور خورده است.

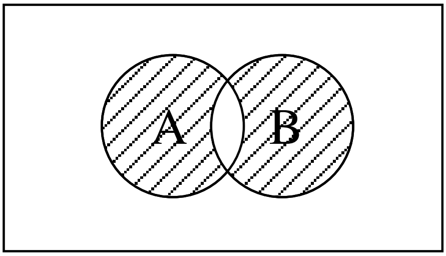
ممکن است A زیرمجموعه B باشد، در این صورت $A - B$ را یک تفاضل واقعی می‌نامند. در تصویر زیر تفاضل واقعی $A - B$ سایه خورده است.



نمودار ۶ــ A–B به‌صورت تفاضل واقعی

تفاضل متقارن A و B

پیشامدی که از تمام پیشامدهای ساده که یا در A یا در B امّا نه در هر دو باشند، تشکیل شده باشد، تفاضل متقارن A و B نامیده می‌شود که با علامت A Δ B نشان داده می‌شود. (یا A یا B نه هر دو) در تصویر مقابل تفاضل متقارن A و B را مشاهده می‌کنید.



نمودار ۷ــ A Δ B سایه خورده است.

مثال زیر می‌تواند در بیان مفاهیم اساسی نظریه مجموعه‌ها، شما را کمک کند.*

مثال ــ فرض کنید دو عدد کارت سفید با شماره‌های ۱ و ۲، سه عدد کارت قرمز با شماره‌های ۳، ۴ و ۵ و دو عدد کارت سبز با شماره‌های ۶ و ۷ را که هم‌اندازه و هم‌شکل هستند به‌خوبی مخلوط کرده، به‌طور تصادفی یک کارت از هفت کارت را بیرون بیاوریم در این صورت اگر A پیشامد کارت بزرگتر از ۱ و B پیشامد کارت کوچکتر از ۵ باشد خواهیم داشت :

A = {۲,۳,۴,۵,۶,۷}

B = {۱,۲,۳,۴}

با این ترتیب می‌توان نوشت :

فضای نمونه‌ای	S = {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷}
اجتماع دو پیشامد A و B	A B = {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷}
اشتراک دو پیشامد A و B	A B = {۲,۳,۴}
مکمّل پیشامد A	A. = {۱}
مکمّل پیشامد B	B. = {۵,۶,۷}
تفاضل B از A	A – B = {۵,۶,۷}
تفاضل A از B	B – A = {۱}
تفاضل متقارن A و B	A Δ B = {۱,۵,۶,۷}

* این مثال از کتاب آمار و احتمال مقدماتی تألیف دکتر جواد بهبودیان اقتباس شده است.

مفاهیم اساسی احتمال (اصطلاحات)

آزمایش و انواع آن

واژهٔ آزمایش در مبحث احتمال به معنای هر نوع تحقیق عملی است،که بر اثر انجام آن،داده‌های آماری به دست می‌آیند. دو نوع آزمایش متمایز، وجود دارد :

آزمایش تجربی ــ آزمایش تجربی عبارت است از فرآیند شناخته شده‌ای که به نتیجهٔ معیّنی منجر شود و در شرایط کنترل شده قابلیّت تکرار را داشته باشد. مانند نتایجی که در آزمایشهای درس شیمی، انتظار آنها را داریم. مثل اینکه بر اثر واکنش اسیدسولفوریک گرم و غلیظ و مس، انتظار داریم که سولفات مس و انیدرید سولفورو و دو مولکول آب حاصل شود.

آزمایش تجربی ــ تصادفی ــ آزمایشهای تجربی ــ تصادفی به آن دسته از آزمایشها گویند که عامل تصادف در نتیجهٔ آنها دخالت داشته باشد. و به همین دلیل، نتیجهٔ قطعی آنها را قبل از انجام آزمایش نمی‌توان پیش‌بینی کرد.مانند نتیجهٔ پرتاب یک سکّهٔ سالم[1] (ایده‌آل) که یا روی سکّه یا پشت سکّه ظاهر خواهد شد.

تئوری احتمالات در مورد آزمایشهای تجربی کاربردی ندارد، زیرا در شرایط اطمینان، انجام می‌شوند،در حالی که این تئوری می‌تواند در مورد آزمایشهای تجربی ــ تصادفی،که در شرایط عدم اطمینان انجام می‌شوند،کاربردهای فراوانی داشته باشد. می‌توان گفت به‌طورکلی هرگاه انسان با عدم یقین مواجه می‌شود، واژه احتمال را به‌کار می‌برد.

فضای نمونه‌ای چیست؟

مجموعهٔ نتایج ممکن و متمایز یک آزمایش تجربی ــ تصادفی را « فضای نمونه‌ای » گویند که با علامت S نشان داده می‌شود. مثلاً اگر روی سکّه را با علامت H (از کلمهٔ Head) و پشت سکّه را با نماد T (از واژهٔ Tail) نشان دهیم، در پرتاب یک سکّهٔ سالم، خواهیم داشت $S=\{H,T\}$. اگر تعداد عضوهای یک فضای نمونه‌ای به گونه‌ای باشند که بتوان عددی را به تعداد عناصر فضای نمونه‌ای نسبت داد،فضا را متناهی (محدود) می‌نامند و در غیر این صورت، فضای نمونه‌ای را نامتناهی (نامحدود) گویند. مثلاً اگر سکّه‌ای را آنقدر بریزید تا سرانجام روی سکّه ظاهر شود، فضای

۱ــ سکه سالم یا ایده‌آل سکه‌ای است که دو طرف آن برای بالا قرار گرفتن، شانس مساوی داشته باشند. چنین سکه‌هایی را، سکه‌های نااریب گویند.

نمونه‌ای از نوع نامتناهی خواهد بود، زیرا معلوم نیست که در چندمین نوبت، روی سکّه ظاهر خواهد شد. نگاه کنید :

$S = \{ H,TH,TTH,TTTH,... \}$

چنانچه عضوهای فضاهای نمونه‌ای متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر باشند، می‌گویند فضای نمونه‌ای گسسته است. اما اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ای مشتمل بر تمامی‌اعداد متعلّق به یک فاصله یا اجتماع چند فاصله باشد، آن فضا را اصطلاحاً پیوسته می‌نامند. طول خطوط، سطح زیرمنحنیها و حجم اجسام فضایی از نوع فضاهای نمونه‌ای پیوسته محسوب می‌شوند.

برآمد[1] چیست؟

به هر نتیجه از نتایج ممکن یک آزمایش تجربی ــ تصادفی یک «برآمد» گفته می‌شود.
مثلاً اگر سکّه‌ای را سه بار پرتاب کنیم،فضای نمونه‌ای شامل $(۸ = ۲^۳)$ برآمد زیر خواهد بود :

$S = \{ HHH-HHT- HTH - HTT - THH - THT - TTH - TTT \}$

تذکّر : برای تعیین تعداد عضوهای هر فضای نمونه‌ای گسسته، تعداد حالتهای یک بار آزمایش را به‌توانِ تعداد تکرار آزمایش برسانید.

تذکر: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پیوسته، مانند طول یا سطح یا حجم بی‌نهایت بوده و قابل شمارش نیست.

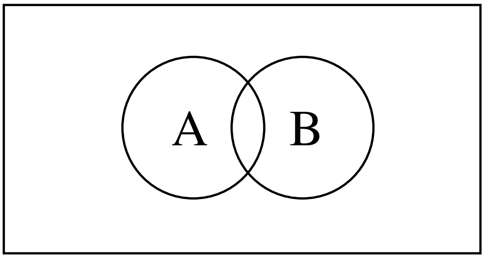
پیشامد (رویداد) چیست؟

هر زیر مجموعه از مجموعهٔ فضای نمونه‌ای S را یک « پیشامد » گویند. پیشامدها را با حروف A، B، C و... نشان می‌دهند. پیشامد می‌تواند ساده یا مرکّب باشد.اگر تنها یک برآمد، در کلّ برآمدها دارای خصوصیّتی مشخّص و قابل تعریف کردن باشد، پیشامد مزبور را ساده نامند. مانند : آمدن دقیقاً سه بار روی سکّه در پرتاب یک سکّه سه بار. امّا اگر یک پیشامد، مجموعه‌ای از چند برآمد باشد که خصوصیّت مشترکی را دارا باشند، اصطلاحاً به آن «پیشامد مرکّب » گفته می‌شود. مانند ظاهر شدن دوبار روی سکّه در پرتاب یک سکّه سه بار.

۱ــ Outcome

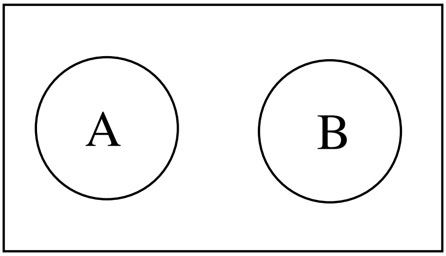
پیشامدهای ناسازگار و سازگار[۱]

A وB را ناسازگار گویند هرگاه نتوانند همزمان رخ دهند. مانند تولّد پسر و دختر در یک زایمان با یک فرزند. یا آمدن روی سکّه و پشت سکّه به طور همزمان در پرتاب یک سکّه یک بار. امّا **دو پیشامد A و B، سازگار خواهند بود، هرگاه بتوانند همزمان رخ دهند.** مثل اینکه در یک جعبه، پنج مهرهٔ زرد با شماره‌های ۱ تا ۵ و پانزده مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۱۵ وجود داشته باشد و یک مهره به تصادف بیرون بیاوریم و بخواهیم مهرهٔ استخراج شده، زرد یا عددی کوچکتر از چهار باشد. در نمودارهای ۸ و ۹ با پیشامدهای سازگار و ناسازگار به صورت هندسی آشنا می‌شوید :



A B≠.

نمودار ۸ ــ دو پیشامد سازگار



A B=.

نمودار ۹ ــ دو پیشامد ناسازگار

پیشامدهای مستقل (نابسته) و غیرمستقل (وابسته) ــ هرگاه وقوع A تأثیری در مقدار احتمال وقوع B نداشته باشد، پیشامدهای A و B را مستقل گویند، امّا اگر وقوع A در مقدار احتمال Bمؤثّر باشد و مقدار احتمال را تغییر دهد، A و B را غیرمستقل گویند. مثلاً اگر از یک گلدان با ۱۰ مهرهٔ سفید و ۲۰ مهرهٔ سیاه، دو مهره یک بار متوالیاً و با جایگذاری و یک بار متوالیاً و بدون جایگذاری استخراج کنیم و بخواهیم هر دو مهره سفید باشند، در حالت اوّل سفید بودن مهرهٔ اوّل و سفید بودن مهرهٔ دوم دو پیشامد مستقل خواهند بود، اما در حالت دوم، این دو پیشامد غیرمستقل محسوب می‌شوند، زیرا در حالت بدون جایگذاری، سفید بودن مهرهٔ اول در احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم تأثیر خواهد گذاشت.

پیشامدهای حتمی، غیرممکن و تصادفی ــ پیشامدهای موجود را از نظر شدّت و ضعف مقدار ریاضی احتمال به ۳ دسته تقسیم می‌کنند :

ــ ***پیشامدهای حتمی (یقینی) ــ*** پیشامدی را حتمی گویند که تحت هر شرایطی به‌طور

۱ــ پیشامدهای ناسازگار را مانعةالجمع و پیشامدهای سازگار را غیرمانعةالجمع نیز می‌گویند.

اجتناب‌ناپذیری رخ خواهد داد. در صفحات بعد، خواهیم دید که مقدار احتمال چنین پیشامدهایی مساوی واحد (= ۱) خواهد بود (یعنی امکان وقوع آنها صددرصد است).

ــ ***پیشامدهای غیرممکن (محال)*** ــ پیشامدی را غیرممکن گویند که تحت هیچ شرایطی امکان وقوع نداشته باشد. مقدار احتمال چنین پیشامدهایی مساوی صفر است.

ــ ***پیشامدهای تصادفی (احتمالی)*** ــ به پیشامدهایی که امکان وقوع یا عدم وقوع آنها وجود دارد، پیشامدهای تصادفی گفته می‌شود. مقدار احتمال چنین پیشامدهایی بین صفر و یک است.

برای مثال اگر در داخل یک گلدان ۵ سکّه ۱۰ ریالی وجود داشته باشد و یک سکّه به‌طور تصادفی بیرون بیاوریم، آمدن یک سکّه ۱۰ ریالی، یک پیشامد حتمی و آمدن یک سکّه ۲۰ ریالی یک پیشامد غیرممکن است، اما اگر علاوه بر ۵ سکّهٔ ۱۰ ریالی در داخل گلدان، ۵ سکّه ۲۰ ریالی نیز وجود داشته باشد و یک سکّه بیرون بیاوریم، آمدن یک سکّه ۱۰ ریالی یک پیشامد تصادفی است.

خودآزمایی ــ در زندگی شخصی خودتان سه پیشامد حتمی و سه پیشامد غیرممکن و سه پیشامد احتمالی بیان نمایید.

برداشتهای مختلف از احتمال

واژهٔ احتمال را می‌توان معادل کلمهٔ « شانس » وقوع و یا عدم وقوع پیشامدهای معیّن تلقّی کرد. مثلاً وقتی یک سکّه را پرتاب می‌کنیم، احتمال آمدن روی سکّه، معادل است با شانس آمدن روی سکّه. یا احتمال اینکه دانشجویی از سلف‌سرویس دانشکده‌ای استفاده کند، معادل است با شانس استفاده کردنِ دانشجو از سلف سرویس. و یا احتمال اینکه کالای جدیدی در بازار موفق باشد، در حقیقت منظور همان شانس موفقیّت کالای جدید در بازار می‌باشد. هر کدام از این سه مثال، نشان‌دهندهٔ برخوردی خاص با مفهوم احتمال است. در مثال اول (پرتاب سکّه) پیشامد مطرح شده به فضای نمونه‌ای تعلّق دارد با تعدادی برآمد هم شانس. چنین برداشتی را « **احتمال کلاسیک** » نام داده‌اند.

هر یک از برآمدها درچنین آزمایشها، شانسی مساوی $\frac{1}{n}$ خواهند داشت. (اگر آزمایش دارای n برآمد باشد.)

اولین بار « لاپلاس » در قرن هفدهم، تئوری احتمال را با این برداشت، پایه‌گذاری کرد.

در مثال دوم (احتمال استفاده کردن دانشجو از سلف‌سرویس) پیشامدی مطرح شده که فضای نمونه‌ای آن دارای برآمدهای هم شانس نیستند،یعنی تعداد کلّ موفقیّتها و تعداد کل پیشامدهای ممکن از قبل مشخص نیستند بلکه بر اساس مشاهدات نمونه‌ای معلوم خواهند شد.چنین برداشتی را «**احتمال تجربی ــ کلاسیک** » گویند.

امّا در مثال سوم (احتمال موفقیّت کالای جدید در بازار) نمی‌توان به صورت عینی، تعداد موفقیّتها و تعداد کل حالات را مشخص کرد و لذا محاسبهٔ احتمال،جنبه ذهنی و شخصی پیدا کرده،متکی بر ادراک و شخصیّت فرد در حدس‌زدن می‌باشد. به چنین برداشتی « **احتمال ذهنی ــ شخصی** » نام داده‌اند.اکثر تصمیم‌گیریهای اقتصادی ــ تجاری با تکیه بر چنین برداشتی از احتمال صورت می‌پذیرند.برداشت احتمال کلاسیک را به این دلیل که فضای نمونه‌ای آن حامل برآمدهای هم‌شانس می‌باشد،« **مدل احتمال یکنواخت**» و برداشت احتمال تجربی ــ کلاسیک را به این دلیل که فضای نمونه‌ای آن حامل برآمدهای غیر هم‌شانس می‌باشد، « **مدل احتمال غیر یکنواخت** » می‌نامند.

اصول قراردادی (موضوعه) احتمال

چون برداشتهای سه گانهٔ احتمال،دارای این ضعف مهم هستند که برای تعریف احتمال، ازخود واژهٔ احتمال استفاده می‌کنند، لذا ریاضیدان معروف روس، آندره کولموگروف[1] احتمال را یک مفهوم ثابت و غیرقابل تعریف درنظر گرفت، (مثل اینکه در هندسه نقطه را یک مفهوم ثابت و تعریف‌نشدنی در نظرمی‌گیرند.) و سه اصل زیر را به عنوان اصول بدیهی، ثابت و بی‌نیاز از استدلال، عنوان کرد :

اصل اوّل

احتمال رخ دادن هر برآمد در هر فضای نمونه‌ای، یک عدد غیرمنفی است، به‌طوری که اگرفضای نمونه‌ای S را با برآمدهای $e_۱, e_۲, e_۳, \dots, e_n$ در نظر بگیریم،خواهیم داشت :

(فرمول۱) $\boxed{۰ \leq P \leq ۱}$

۱ ــ Kolmogrov André

اصل دوم

مجموع احتمالهای رخ دادن تمامی برآمدهای فضای نمونه‌ای S، مساوی یک خواهد بود. یعنی اگر S دارای چند برآمد باشد :

$$\boxed{\begin{array}{l} S = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots e_n \\ P_{(s)} = P_{(e_1)} + P_{(e_2)} + P_{(e_3)} + \ldots + P_{(e_n)} = 1 \end{array}} \qquad \text{(فرمول ۲)}$$

اصل سوم

احتمال رخ دادن هر پیشامد مشخص (مانند پیشامد A) برابر است با مجموع احتمالهای رخ‌دادن برآمدهایی که پیشامد مورد نظر را تشکیل می‌دهند. مثلاً برای پیشامد A که از چند برآمد ناسازگار تشکیل شده است :

$$\boxed{\begin{array}{l} A = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_k \\ P_{(A)} = P_{(e_1)} + P_{(e_2)} + P_{(e_3)} + \ldots + P_{(e_k)} \end{array}} \qquad \text{(فرمول۳)}$$

تذکّر: سایر قوانین احتمال را می‌توان با کمک سه اصل بالا استنتاج کرد.

فرمولهای ریاضی احتمال

تعریف احتمال بر مبنای فراوانی نسبی (= احتمال نظری)

از سه نظریه و برداشتهای مختلف احتمال و با استفاده از منطق فراوانی نسبی (که در درس مفاهیم و روشهای آماری (۱) با آن آشنا شده‌اید.) می‌توان قانونمندی زیر را برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد بیان کرد :

$$\boxed{\text{مقدار احتمال هر پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد آن پیشامد}}{\text{تعداد کلّ حالات ممکن آزمایش}}}$$

توجّه نمایید که از دستور بالا فقط وقتی استفاده می‌کنیم که نتایج یک آزمایش هم‌شانس باشند. مثلاً اگر پیشامدی مانند A را در فضای نمونه‌ای S در نظر بگیریم، و احتمال را با علامت P (ازکلمهٔ انگلیسی Probability) نشان دهیم،خواهیم داشت :

(فرمول ۴)
$$\boxed{P_{(A)} = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

برای توجیه بیشتر این دستور،به یک مثال توجّه کنید :

شما وقتی یک سکّه سالم را یک بار پرتاب می‌کنید، چرا و به کدامین دلیل احتمال آمدن روی سکّه را مساوی $\frac{۱}{۲}$ می‌پندارید؟ آیا از هر دو بار پرتاب یک سکّهٔ سالم حتماً یک بار آن روی سکّه بالا قرار می‌گیرد؟

طبیعی است که جواب این سؤال منفی است. اما چرا احتمال روی سکّه را $\frac{۱}{۲}$ می‌دانند؟ دلیل این امر، آن است که اگر سکّه سالم باشد[1] (سکّه نااریب باشد.) با افزوده شدن بر دفعات تکرار آزمایش، نسبت دفعاتی که روی سکّه بالا قرار می‌گیرد، به کل دفعات پرتاب به سمت $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند. درحالی که اگر سکّه اریب باشد،(مثلاً چکش خورده باشد.) نسبت مزبور به سوی احتمالی متفاوت از $\frac{۱}{۲}$ گرایش پیدا می‌کند :

هرگاه تعداد آزمایشهای تصادفی را به سمت بی نهایت میل دهیم، فراوانی نسبی نیز به سمت مقدار احتمال پیشامد مورد نظر،میل خواهد کرد.

تذکّر: هرگاه شمارش حالات مساعد و حالات ممکن، به علت بی‌شمار بودن آنها امکان‌پذیر نباشد، برای محاسبهٔ احتمال از طول یا مساحت یا حجم حالات مساعد و حالات ممکن، استفاده می‌کنند. این شیوه محاسبه احتمال را اصطلاحاً «احتمال هندسی» نام داده‌اند.

مثال ۱ــ در گلدانی ۴ مهرهٔ سفید،۶ مهرهٔ سیاه و ۱۰مهرهٔ آبی وجود دارد.(مهره‌ها صرفنظر از رنگ،کاملاً یکسان هستند.) از این ظرف، یک مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد،چقدر است؟

$$P_{(\text{سیاه بودن})} = \frac{۶}{۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

۱ــ به سکه سالم یا به تاس سالم، اصطلاحاً سکه ایده‌ال یا تاس ایده‌ال گفته می‌شود.

این مثال، از مدل احتمال غیر یکنواخت،تبعیّت می‌کند زیرا برآمدهای سفید و سیاه و آبی هم‌شانس نیستند.

مثال ۲ــ سکّه سالمی‌را دوبار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آمدن هر دو بار پشت سکّه چقدر است؟

$$S=\{ HH- HT - TH - TT \}$$

$$P_{(TT)} = \frac{۱}{۴}$$

ملاحظه می‌کنید که این مثال، منطبق با مدل احتمال یکنواخت می‌باشد.(زیرا هر یک از برآمدهای HH - HT - TH و TT هم‌شانس هستند.)

احتمال متمّم یک پیشامد

با توجّه به اینکه **اگر A یک پیشامد از S باشد، A^c پیشامدی است به نام متمم A (یا مکّمل A) به طوری که عضوهایش به‌جز عضوهای A باشند**[۱]. و با توجه به اصل دوم از اصول قراردادی (موضوعه) احتمال. (مجموع احتمالهای رخ دادن تمامی برآمدهای فضای نمونه‌ای S باید مساوی یک باشند.) می‌توان نوشت :

$$\boxed{P_{(A)} + P_{\left(A^c\right)} = ۱} \overset{\text{بنابراین}}{\Rightarrow} P_{(AC)} = ۱ - P_{(A)}$$ (فرمول ۵)

معمولاً از رابطه بالا وقتی استفاده می‌کنیم که بخواهیم احتمال رخ ندادن یک پیشامد را محاسبه نماییم.

مثال ۳ــ کارمندان یک شرکت را از نظر اهلیّت و جنسیّت، مورد بررسی قرار داده‌ایم، جدول زیر حاصل شده است :

اهلیت → / جنسیت ↓	تهرانی	شیرازی	تبریزی	کرمانی	مشهدی	جمع
زن	۵	۴	۳	۶	۷	۲۵
مرد	۸	۷	۵	۱۰	۱۵	۴۵
جمع	۱۳	۱۱	۸	۱۶	۲۲	۷۰

۱ــ بنابراین می‌توان گفت که بین A و A^c رابطه $A \quad A^c = \varnothing$ برقرار است.

اگر یک کارمند را به طور تصادفی انتخاب کنیم،چقدر احتمال هست :

اولاً ــ تبریزی باشد؟ (A)

ثانیاً ــ تبریزی نباشد؟ (A^c)

$$P_{(A)} = \frac{۸}{۷۰} = \frac{۴}{۳۵}$$

$$P_{(A^c)} = ۱ - \frac{۴}{۳۵} = \frac{۳۱}{۳۵}$$

مثال بالا، مثال بسیار ساده‌ای برای استفاده از احتمال متمّم «یا احتمال مکمّل» است. در مواردی که مثال اندکی پیچیده‌تر می‌شود، قانون ۲ــ۵ راهگشا خواهد بود. به‌عنوان نمونه می‌توان به مواردی اشاره کرد که مثلاً بخواهیم احتمال این امر را محاسبه کنیم که از افراد یک خانواده ۵ نفره چقدر احتمال هست که حداقل ۲ نفرشان در یک روز متولّد شده باشند؟

حل: احتمال حداقل ۲ نفر از ۵ نفر در یک روز از سال متولد شده باشند = $P_{(A)}$

پس $P_{(A.)}$ را محاسبه کرده، مقدار آن را از یک کم می‌کنیم

احتمال آنکه تولد هر ۵ نفر در یک روز نباشد = $P_{(A.)}$

$$P_{(A.)} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^۵}$$

و درنتیجه :

$$P_{(A)} = ۱ - \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^۵}$$

توضیح: توجّه دارید که مخرج کسر بالا (یعنی تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای) طبق اصل ضرب برای ۵ نفر از $۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵$ یعنی $(۳۶۵)^۵$ به‌دست آمده است زیرا هرکدام از افراد خانواده می‌توانسته‌اند در یکی از ۳۶۵ روز سال متولد شده باشند.(سال کبیسه را صرفنظر کرده‌ایم.)

احتمال اجتماع دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند،احتمال اجتماع آنها از فرمول ۶ به‌دست می‌آید :

(فرمول ۶) $\boxed{P_{(A \cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)}}$

در حالی که اگر A و B سازگار باشند، احتمال اجتماع آنها، طبق فرمول ۷ محاسبه خواهد شد.

$$\boxed{P_{(A\ \ B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A\ \ B)}}$$ (فرمول ۷)

مثال ۴ـ اگر از جدول مثال ۳ یک نفر به طور تصادفی انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که اولاً فرد انتخاب شده، تهرانی یا تبریزی باشد؟ ثانیاً، احتمال اینکه فرد انتخاب شده تهرانی یا زن باشد، چقدر است؟

$$P_{(\text{تهرانی یا تبریزی})} = P_{(\text{تهرانی})} + P_{(\text{تبریزی})} = \frac{۱۳}{۷۰} + \frac{۸}{۷۰} = \frac{۲۱}{۷۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$P_{(\text{تهرانی یا زن})} = P_{(\text{تهرانی})} + P_{(\text{زن})} - P_{(\text{تهرانی و زن})} = \frac{۱۳}{۷۰} + \frac{۲۵}{۷۰} - \frac{۵}{۷۰} = \frac{۳۳}{۷۰}$$

احتمال اشتراک دو پیشامد

اگر Aو B دو پیشامد مستقل از همدیگر باشند،طبق اصل ضرب،احتمال اشتراک آنها ازحاصلضرب احتمالهایشان به دست خواهد آمد. (به‌شرط آنکه احتمال هریک از پیشامدهای A و B مخالف صفر باشد.)

یا

$$\boxed{P_{(A\ \ B)} = P_{(A)} \times P_{(B)} = P_{(B)} \times P_{(A)}}$$ (فرمول ۸)

فرمول ۸ شرط مستقل بودن دو پیشامد A و B نیز خواهد بود.

مثال ۵ ـ احتمال اینکه کارمندی در یک اداره در مرخصی باشد، ۰/۲ و احتمال اینکه به کارمندی حکم جدیدی داده شود، ۰/۰۱ است.

احتمال اینکه کارمندی در مرخصی باشد و حکم جدیدی نیز برایش صادر شود، چقدر است؟

توجّه دارید که دو پیشامد «در مرخصی بودن» و«صدور حکم جدید»، دو پیشامد مستقل هستند.

$$P_{(A\ \ B)} = ۰/۲ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۲$$

تذکّر: اگر در فرمول ۸ پیشامد A مشروط به پیشامد B باشد،که با نماد $A|B$ نشان داده می‌شود[۱]، باید فرمول ۸ را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$P_{(A\ \ B)} = P_{(B)} . P_{(A|B)}$$ (فرمول ۹)

۱ـ احتمال شرطی را با نماد $A/_B$ نیز نشان می‌دهند.

مثال ۶ـــ در داخل یک انبار، از انبارهای اتومبیلهای ساخته شدهٔ یک کارخانه، ۸۰ اتومبیل سواری و ۲۰ اتومبیل وانت وجود دارد. دو اتومبیل به‌طور تصادفی از انبار خارج می‌کنیم. احتمال این که هر دو اتومبیل سواری باشند، چقدر است؟

$$P_{(\text{اولی سواری باشد})} = \frac{۸۰}{۱۰۰}$$

$$P_{(\text{دومی سواری باشد})} = \frac{۷۹}{۹۹}$$

$$P_{(\text{هر دو سواری باشد})} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \times \frac{۷۹}{۹۹} = \frac{۳۱۶}{۴۹۵}$$

مثال ۷ـــ در یک قفسه در یک بانک، ۱۰ کارت حساب جاری و ۲۰ کارت حساب پس‌انداز وجود دارد. اگر بخواهیم سه کارت به طور تصادفی انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که هر سه کارت از نوع حساب جاری باشند؟

$$P = \frac{۱۰}{۳۰} \times \frac{۹}{۲۹} \times \frac{۸}{۲۸} = \frac{۶}{۲۰۳}$$

تذکّر: مثالهایی نظیر مثال ۷ را می‌توان با کمک ترکیب (یا سایر عوامل آنالیز ترکیبی) نیز حل کرد. مثلاً می‌توان مثال ۷ را به‌صورت زیر حل کرد.

$$P = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}} = \frac{C_{۱۰}^{۳}}{C_{۳۰}^{۳}} = \frac{۶}{۲۰۳}$$

مثال ۸ ـــ در یک انبار، ۱۰ کارتن یخچال، ۲۰ کارتن فریزر و ۲۰ کارتن یخچال ـــ فریزر وجود دارد که از نظر ظاهر، شبیه هم هستند. اگر به طور تصادفی ۳ جعبه از آنها را انتخاب کنیم، چقدر احتمال هست که :

اولاً ـــ هر سه کارتن یخچال باشند؟

$$P = \frac{C_{۱۰}^{۳}}{C_{۵۰}^{۳}}$$

ثانیاً ـــ دو عدد فریزر و یکی یخچال ـــ فریزر باشد؟

$$P = \frac{C_{۲۰}^{۲} \times C_{۲۰}^{۱}}{C_{۵۰}^{۳}}$$

ثالثاً ـــ هیچ کدام مثل هم نباشند؟

$$P = \frac{C_{۱۰}^{۱} \times C_{۲۰}^{۱} \times C_{۲۰}^{۱}}{C_{۵۰}^{۳}}$$

مثال ۹ـــ در یک جعبه، ۱۰ مهرهٔ سفید و ۳۰ مهرهٔ سیاه وجود دارد که از نظر شکل و اندازه و وزن کاملاً یکسان هستند. دو مهره، متوالیاً، یک بار با جایگذاری و یک بار بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن هر دو مهره را در دو حالت با جایگذاری و بدون جایگذاری محاسبه کنید.

توضیح: در روش با جایگذاری، هر مهره که بیرون آورده می‌شود، مجدّداً به داخل جعبه برگردانده می‌شود، در حالی که در روش بدون جایگذاری هر مهره که از جعبه خارج می‌شود، کنار گذاشته شده، مهرهٔ بعدی از بقیّهٔ مهره‌ها، بیرون آورده می‌شود.

در روش با جایگذاری

$$P = \frac{۱۰}{۴۰} \times \frac{۱۰}{۴۰} = \frac{۱}{۱۶}$$

در روش بدون جایگذاری

$$P = \frac{۱۰}{۴۰} \times \frac{۹}{۳۹} = \frac{۳}{۵۲}$$

مثال بالا را می‌توان با کمک آنالیز ترکیبی به‌صورت زیر نیز حل کرد :

در روش با جایگذاری با کمک ترتیبهای با تکرار

$$P = \frac{P_{۱۰}^{۲}}{P_{۴۰}^{۲}} = \frac{۱۰^{۲}}{۴۰^{۲}} = \frac{۱۰ \times ۱۰}{۴۰ \times ۴۰} = \frac{۱}{۱۶}$$

در روش بدون جایگذاری با کمک ترتیبهای بدون تکرار

$$P = \frac{P_{۱۰}^{۲}}{P_{۴۰}^{۲}} = \frac{\frac{۱۰!}{۸!}}{\frac{۴۰!}{۳۸!}} = \frac{۱۰ \times ۹}{۴۰ \times ۳۹} = \frac{۳}{۵۲}$$

تفاوت « مستقل بودن » و « ناسازگار بودن » پیشامدها

گاهی مفاهیم « مستقل بودن » دو پیشامد و« ناسازگار بودن » دو پیشامد، با هم اشتباه می‌شوند. برای دوری از چنین اشتباهی، توضیح این نکته ضروری است که هرگاه در مورد مستقل بودن دو پیشامد A وB سخن به میان می‌آید، منظور این است که وقوع پیشامد A، هیچ ارتباطی به پیشامد B ندارد. درحالی که وقتی صحبت از ناسازگار بودن A و B می‌شود، مقصود این است که، A وB نمی‌توانند همزمان رخ دهند. شاید این اشتباه، از آنجا ناشی شده است که در نمودارهای وِن، تصوّر بر این است که، دو پیشامد مستقل A و B نباید هیچ نقطهٔ مشترکی داشته باشند، در حالی که این تصور برای دو پیشامد ناسازگار درست است، نه برای دو پیشامد مستقل. مثلاً اگر A پیشامدی باشد با

احتمالی برابر ۰/۲ و B پیشامد دیگری باشد با احتمالی مساوی ۰/۳ به طوری که بشود نوشت :

$$P(A) = ۰/۲ \quad \text{و} \quad P(B) = ۰/۳$$

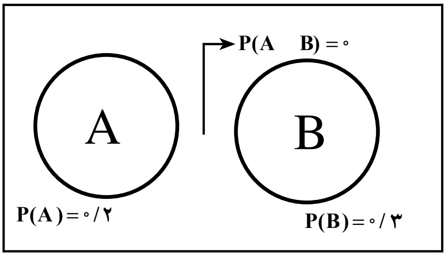
حال اگر A و B مستقل از یکدیگر باشند، خواهیم داشت :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = ۰/۲ \times ۰/۳ = ۰/۰۶$$

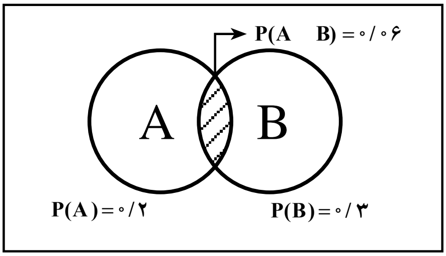
در حالی که اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، باید $A \cap B = \emptyset$ باشد، و چون $P(\emptyset) = ۰$ است، بنابراین :

$$P(A \cap B) = ۰$$

در نمودارهای ۱۰ و ۱۱ وضعیت دو پیشامد ناسازگار و دو پیشامد مستقل را به‌صورت هندسی مشاهده می‌کنید :



نمودار ۱۰ــ دو پیشامد ناسازگار



نمودار ۱۱ ــ دو پیشامد مستقل

محاسبهٔ احتمال شرطی

دو پیشامد را شرطی گویند، هرگاه وقوع یکی مشروط به وقوع « یا عدم وقوع » دیگری باشد در فرمول ۹، اگر $P_{(A|B)}$ را مجهول در نظر بگیریم و $P_{(B)}$ و $P_{(A \cap B)}$ معلوم باشند،باید طرف معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم تا مقدار مجهول محاسبه شود :

$$\boxed{P_{(A|B)} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}}} \qquad \text{(فرمول ۱۰)}$$

در واقع در احتمالات شرطی، فضای نمونه‌ای محدود به موارد شرط (یعنی B) خواهد شد.

فرمول بالا را می‌شود به‌صورت خلاصه شده زیر نیز بیان کرد :

$$\text{مقدار احتمال شرطی} = \frac{\text{از موارد شرط آن تعداد که مورد سؤال هستند}}{\text{موارد شرط}}$$

و یا

$$P_{(A|B)}=\frac{\text{تعداد حالتهایی که A و B می‌توانند رخ دهند}}{\text{تعداد حالتهایی که B می‌تواند رخ دهد}}$$

توجه دارید که در این صورت $P_{(A|B)}$ بزرگتر از $P_{(A)}$ خواهدبود، مگر موقعی که A و B دو پیشامد مستقل باشند، که در این صورت احتمال شرطی،مساوی احتمال غیر شرطی خواهد بود. یعنی :

$$\boxed{P_{(A|B)}=\frac{P_{(A\quad B)}}{P_{(B)}}\xrightarrow{\text{در صورت مستقل بودن}}\frac{P_{(A)}.P_{(B)}}{P_{(B)}}=P_{(A)}}$$ (فرمول ۱۱)

تذکّر: توجه داشته باشید که فرمول احتمال شرطی،زمانی درست است که $P_{(B)}$ مخالف صفر باشد،چه پیشامدها از مدل احتمال یکنواخت تبعیت کنند و چه از مدل احتمال غیر یکنواخت.

مثال ۱۰ــ دو مکعب شش وجهی منتظم (تاس) را که اعداد ۱ تا ۶ روی وجوه مختلف آنها نوشته شده با هم می‌ریزیم. احتمال اینکه حدّاقل، شمارهٔ یکی از مکعبها ۲ باشد، چقدر است؟ (اگر بدانیم که مجموع شماره‌های دو مکعب، مساوی ۶ است.)

حل: اگر A را پیشامد « حدّاقل، شمارهٔ یک مکعب ۲ باشد » بدانیم و B را پیشامد «مجموع دو مکعب شش ». در این صورت می‌توان نوشت :

$$n_{(s)}=۶^{۲}=۳۶$$

$$A=\{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲)\}$$

$$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$$

$$(A\quad B)=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$$

$$P_{(A|B)}=\frac{P_{(A\quad B)}}{P_{(B)}}=\frac{\frac{۲}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶}}=\frac{۲}{۵}$$

مثال ۱۱ــ احتمال اینکه احمد در مرحلهٔ اوّل کنکور دانشگاهها قبول شود، ۰/۷ است و احتمال اینکه اگر در مرحله اوّل قبول شده، در مرحله دوم نیز قبول شود، ۰/۸ است. احتمال اینکه

احمد در هر دو مرحله، قبول شود، چقدر است؟

$$P_{(A|B)}=\frac{P_{(A\cap B)}}{P_{(B)}}\Rightarrow ۰/۸=\frac{P_{(A\cap B)}}{۰/۷}\Rightarrow P_{(A\cap B)}=۰/۵۶$$

مثال ۱۲ـــ در مثال ۱۰ آیا A و B دو پیشامد مستقل‌اند؟ چرا؟

حل: برای اینکه A و B دو پیشامد مستقل باشند باید رابطه زیر بین آنها برقرار باشد :

$$P_{(A\cap B)}=P_{(A)}\cdot P_{(B)}$$

$$P_{(A)}=\frac{۱۱}{۳۶}\ ,\quad P_{(B)}=\frac{۵}{۳۶}\ ,\quad P_{(A\cap B)}=\frac{۲}{۳۶}$$

$$\frac{۱۱}{۳۶}\times\frac{۵}{۳۶}=\frac{۵۵}{۱۲۹۶}$$

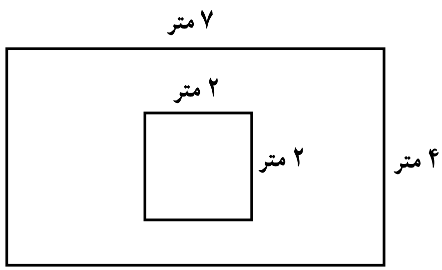
مشاهده می‌کنیم که شرط مستقل بودن بین A و B برقرار نیست زیرا :

$$\frac{۵۵}{۱۲۹۶}\neq\frac{۲}{۳۶}$$

تذکّر ۱: مفهوم حداقل x بار، معادل $X\geq x$ و مفهوم حداکثر x بار معادل $X\leq x$ می‌باشد.

تذکّر ۲: همه مسائلی که در این فصل بیان شده مربوط به مجموعه‌های شمارش‌پذیر بودند. توجّه داشته باشید که احتمالات در مورد مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر مانند مساحت اشکال هندسی و یا حجم و یا طول و نظایر آن نیز کاربردهای فراوانی دارد. تمرینهای ۱۸ و ۱۹ همین فصل نمونه‌ای از احتمالات هندسی هستند.

مثال ۱۳ـــ در تصویر زیر، اگر تیری به سمت مستطیل رها شود، احتمال آن‌که تیر، به مربع برخورد کند، چقدر است؟



حل: در این مسأله، هم فضای نمونه‌ای (یعنی مساحت مستطیل) و هم عضوهای حالت‌های مساعد (مساحت مربع) از نوع فضاهای نمونه‌ای پیوسته هستند.

$$\text{مقدار احتمال} = \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{۲\times۲}{۷\times۴} = \frac{۴}{۲۸} = \frac{۱}{۷}$$

تمرینهای فصل دوم

۱ــ اجتماع دو پیشامد را تعریف کرده، علامت آن را نشان دهید.

۲ــ اشتراک دو پیشامد را تعریف کرده، علامت آن را نشان دهید.

۳ــ مفهوم تهی را توضیح داده، علامت آن را نشان دهید.

۴ــ آزمایش تصادفی چیست؟ انواع آن را نام ببرید و برای هر کدام مثالی ذکر کنید.

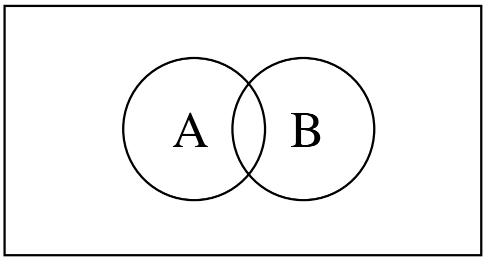
۵ ــ فضای نمونه‌ای را تعریف کرده،برای فضاهای نمونه‌ای محدود و نامحدود مثال بیاورید.

۶ــ پیشامد را تعریف کنید. برای پیشامدهای سازگار و ناسازگار مثال ذکر کنید.

۷ــ برداشتهای مختلف از احتمال را شرح دهید.

۸ ــ سه اصل اساسی احتمال را که به اصول قراردادی (موضوعه) احتمال معروفند، توضیح دهید.

۹ــ در نمودار زیر $(A \quad B)^c$ را سایه بزنید.



۱۰ــ احمد، محمود و حامد در یک مسابقهٔ علمی‌شرکت کرده‌اند. اگر بدانیم احتمال برنده شدن احمد دو برابر برنده شدن محمود و احتمال برنده شدن محمود دو برابر برنده شدن حامد است،احتمال برنده شدن هر یک ازاین سه نفر را معلوم کنید.

۱۱ــ اگر احتمال بالا قرار گرفتن روی سکّه‌ای، دو برابر احتمال بالا قرار گرفتن پشت آن باشد، چقدر احتمال دارد که در دو بار پرتاب این سکّه، هر دو بار روی سکّه بالا قرار گیرد؟

۱۲ــ در یک شرکت بیمه، ۱۰ بیمه نامه تنظیم شده که چهار عدد آنها مربوط به بیمهٔ اتومبیل و ۶ عدد بقیه، مربوط به بیمهٔ آتش سوزی می‌باشند. اگر به طور تصادفی سه عدد از بیمه نامه‌ها را انتخاب کنیم،چقدر احتمال دارد :

الف) هر سه، بیمه‌نامهٔ اتومبیل باشند؟

ب) دو عدد از بیمه‌نامه‌ها، از نوع بیمهٔ آتش‌سوزی باشند؟

ج) حدّاقل یکی از آنها مربوط به بیمهٔ اتومبیل باشد؟

د) حداکثر دو بیمه‌نامه از نوع بیمه آتش‌سوزی باشند؟

۱۳ــ ۲۵۰ نفر از دانش‌آموزان یک دبیرستان را از نظر رشتهٔ تحصیلی و کلاس، مطابق جدول زیر مورد بررسی قرار داده‌ایم. اگر یک دانش‌آموز به‌طور تصادفی از این گروه انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که :

الف) کلاس سوم باشد؟

ب) کلاس سوم نباشد؟

ج) کلاس اول یا دوم باشد؟

د) رشتهٔ حسابداری و کلاس سوم باشد؟

هـ) رشتهٔ حسابداری یا کلاس دوم باشد؟

و) رشتهٔ بازرگانی باشد به شرطی که بدانیم کلاس اول است؟

ز) آیا کلاس چهارم بودن و رشتهٔ حسابداری بودن،دو پیشامد مستقل‌اند؟چرا؟

کلاس ← / رشته ↓	اول	دوم	سوم	چهارم
تجربی	۲۰	۱۵	۲۵	۸
ریاضی	۱۰	۵	۱۵	۱۰
حسابداری	۳۰	۱۵	۱۰	۱۲
بازرگانی	۴۰	۲۰	۱۰	۵

۱۴ــ اگر از جدول تمرین ۱۳،چهارنفر به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه رشته‌های آنها متفاوت باشد، چقدر است؟ واحتمال اینکه هر چهار نفر از یک رشته باشند،چقدر است؟

۱۵ــ ۷۰٪ دانش‌آموزان یک دبیرستان، درس آمار را و ۴۰٪ آنها درس ریاضیات عمومی و ۳۰٪ دانش‌آموزان هر دو درس را انتخاب کرده‌اند. اگر یک دانش‌آموز را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه :

الف) آمار یا ریاضی را انتخاب کرده باشد، چقدر است؟

ب) هیچ کدام از این دروس را انتخاب نکرده باشند،چقدر است؟

۱۶ــ احتمال اینکه آقای x یک مسأله را حل کند $\frac{۲}{۹}$ و احتمال اینکه همین مسأله را آقای y حل کند $\frac{۳}{۵}$ است.این مسأله را به هر دو نفر ارائه می‌دهیم تا حل کنند.چقدر احتمال دارد که :

الف) هر دو نفر مسأله را حل کنند.

ب) مسأله حل شود.

ج) فقط یکی از آنها مسأله را حل کند.

۱۷ــ در یک دانشکده،کلاس Aدارای ۱۵ دانشجوی تهرانی و ۲۵ دانشجوی شهرستانی و کلاس B دارای ۲۰ دانشجوی تهرانی و ۴۰ دانشجوی شهرستانی است.اگر از هر کلاس یک دانشجو به صورت تصادفی انتخاب کنیم،چقدر احتمال دارد که از کلاس A تهرانی و ازکلاسB شهرستانی باشند؟ اگر بخواهیم از هر دو کلاس شهرستانی باشند، احتمال را معلوم کنید.اگر بخواهیم هردو نفری که انتخاب می‌شوند یا تهرانی باشند یا شهرستانی، مقدار احتمال چقدر خواهد بود؟

۱۸ــ دایره‌ای به شعاع R را درنظر بگیرید. اگر به‌طور تصادفی نقطه‌ای در داخل این دایره انتخاب شود، احتمال آنکه این نقطه به مرکز دایره نزدیکتر از محیط دایره باشد، چقدر است؟

راهنمایی ــ فضای نمونه‌ای، مجموعه شمارش‌ناپذیر مساحت یک دایره به شعاع R است.

۱۹ــ مستطیلی به طول ۲۵ و عرض ۲۰ سانتی‌متر را درنظر بگیرید که در داخل آن دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر واقع شده باشد. اگر تیری به سمت مستطیل رها شود، احتمال آنکه به دایره اصابت نماید چقدر است؟

۲۰ــ اگر سه پیشامد A، B و C دو به دو با همدیگر ناسازگار باشند و بدانیم که $P_{(A)} = ۰/۱$ ، $P_{(B)} = ۰/۳$ و $P_{(C)} = ۰/۳$ باشد، $P_{(A \quad B \quad C)}$ چقدر است؟

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ـ A و B مستقل‌اند $P_{.A\;\;B.}=\frac{۱}{۸}$ ، $P_{.A.}=\frac{۱}{۲}$ است. $P_{.B.}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۲ـ از ظرفی با ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه،۲ مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه حدّاقل یک مهره سیاه بیرون آمده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۶}{۱۰}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

۳ـ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P_{.A.}=۰/۳$ و $P_{.B.}=۰/۲$ باشد، $P_{.A\;\;B.}$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵۶

۴ـ یک تاس را دوبار می‌اندازیم. احتمال آنکه جمع دو شماره، حدّاقل برابر ۱۰ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳۶}$ ۲) $\frac{۳}{۳۶}$ ۳) $\frac{۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۶}{۳۶}$

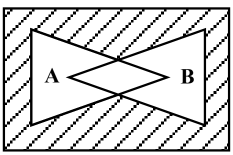
۵ـ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P_{.A|B.}$ کدام است؟

۱) $P_{.B.}$ ۲) $P_{.A.}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۶ـ یک سکّه سالم را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال آنکه دو بار روی سکّه بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۶}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷ـ در تصویر زیر کدام بخش، هاشور خورده است؟



۱) $A\quad B$ ۲) $.A\quad B.^{c}$

۳) $A^{c}\quad B^{c}$ ۴) گزینه‌های ۲ و ۳ درست است.

۸ ـ هرگاه $S=$ ۱,۵,۲,۸ , $A=$ ۱,۵ و $B=$ ۸ باشد، کدام پیشامد در یک آزمایش تصادفی حتمی‌است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\quad B$ ۴) S

۹ــ احتمال اینکه احمد یک مسأله را درست حل کند، $\frac{۳}{۵}$ است و احتمال اینکه محمود همان مسأله را درست حل کند، $\frac{۱}{۴}$ است. این مسأله را به هر دو شخص می‌دهیم تا حل کنند. احتمال آنکه مسأله درست حل شود، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۴}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۲۰}{۲۰}$

۱۰ــ در جعبه A دو مهرهٔ سبز و سه مهرهٔ قرمز و در جعبه B سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ زرد وجود دارد. از هر جعبه، یک مهره به تصادف اختیارمی‌کنیم. احتمال همرنگ نبودن مهره‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۹}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۵}$

۱۱ــ اگر از کلاسی که ۱۰ دانش آموز تهرانی و ۲۰ دانش‌آموز غیرتهرانی در آن درس می‌خوانند، دو نماینده انتخاب کنیم، احتمال آن‌که هر دو نماینده تهرانی باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۲۹}$

۱۲ــ در تست ۱۱ احتمال آن‌که هر دو نماینده غیرتهرانی باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۳۸}{۸۷}$ ۳) $\frac{۳۸}{۹۰}$ ۴) $\frac{۱۹}{۸۷}$

۱۳ــ در تست ۱۱ چقدر احتمال هست که یکی از نمایندگان تهرانی و دیگری غیرتهرانی باشد؟

۱) $\frac{۱۰}{۸۷}$ ۲) $\frac{۲۰}{۸۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۸۷}$ ۴) $\frac{۸۰}{۸۷}$

۱۴ــ در تست ۱۱ احتمال آن‌که لااقل یکی از نمایندگان تهرانی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۸۷}$ ۲) $\frac{۴۰}{۸۷}$ ۳) $\frac{۳۱}{۸۷}$ ۴) $\frac{۴۹}{۸۷}$

۱۵ــ در داخل یک جعبه ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه هم شکل و هم وزن وجود دارد. اگر از داخل این جعبه دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم. احتمال آن که مهره دومی سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵۴}{۹۰}$ ۲) $\frac{۲۴}{۹۰}$ ۳) $\frac{۳۰}{۹۰}$ ۴) $\frac{۴۸}{۹۰}$

۱۶ــ در تست ۱۵احتمال آن که لااقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۹۰}$ ۲) $\frac{۷۸}{۹۰}$ ۳) $\frac{۳۹}{۹۰}$ ۴) $\frac{۴۲}{۹۰}$

«با شناخت همبستگی بین پدیده‌ها، می‌توان به رابطهٔ علّت و معلولی بسیاری از حوادث پی برد.»

فصل سوم

همبستگی متغیّرها و ضریب همبستگی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ـ همبستگی را تعریف کند.

۲ـ مفهوم کلّی همبستگی را توضیح دهد.

۳ـ علل وجود همبستگی بین پدیده‌ها را بر شمارد.

۴ـ انواع همبستگی را توضیح دهد.

۵ـ درجات و حالات همبستگی را نام برد.

۶ـ درجات و حالات همبستگی را تعریف کند.

۷ـ نمودارهای پراکنش را رسم کرده، تفسیر کند.

۸ـ ضریب همبستگی را محاسبه کند.

۹ـمعنای ضریب همبستگی را بیان کند.

۱۰ـ ضریب تعیین را محاسبه کند.

۱۱ـ کاربرد ضریب تعیین را توضیح دهد.

۱۲ـدرجه معنی‌دار بودن ضریب همبستگی را تبیین کند.

۱۳ـ معادله خطّ رگرسیون را بنویسد و خطّ رگرسیون را رسم کند.

۱۴ـ کوواریانس «همپراش» را محاسبه و تفسیر کند.

مقدّمه

حتماً دیده‌اید و یا شنیده‌اید که برخی از کوهنوردان، در ارتفاعات بالای کوهستان خون دماغ

می‌شوند. هیچ فکر کرده‌اید که دلیل این امر چیست؟ فیزیک‌دانان نشان داده‌اند که هرچه ارتفاع از سطح دریا افزایش پیدا کند، فشار هوا کاهش می‌یابد. و دقیقاً به همین دلیل است که گروهی، در ارتفاعات، خون دماغ می‌شوند. در حقیقت فشار داخلی بدن آنها، بر فشار بیرون غالب می‌شود.

مثالی دیگر : معمولاً به چه کسانی چاق و به چه کسانی لاغر گفته می‌شود؟ آیا وزن یا قد معیّنی به عنوان معیار چاقی یا لاغری وجود دارد که تعیین‌کنندهٔ قضاوت ما دربارهٔ چاقی یا لاغری افراد باشد؟ طبیعی است که پاسخ این سؤال منفی باشد. امّا نوع رابطه‌ای که باید بین وزن و قد افراد برقرار باشد، می‌تواند به عنوان یک معیار به کار برده شود. مثلاً در روان‌شناسی رشد می‌گویند، سانتیمترهای قد افراد در دوران رشد باید حدود ۱۰۰ واحد بیشتر از کیلوگرمهای وزن آنها باشد. برای مثال کسی که ۱۶۰ سانتیمتر قد دارد، باید حدود ۶۰ کیلوگرم وزن داشته باشد تا نه چاق تلقی شود و نه لاغر. حال اگر فردی که ۱۶۰ سانتیمتر قد دارد، ۷۰ کیلوگرم وزن داشته باشد اصطلاح چاقی برای او به کار می‌رود و اگر فرضاً همین شخص ۵۰ کیلوگرم وزن داشته باشد ؛ اصطلاحاً وی را لاغر می‌نامند.

به‌طور دقیق‌تر برای تعیین چاقی و لاغری امروزه از شاخص توده بدن (B.M.I) که مخفف عبارت : Body Mass Index است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود، استفاده می‌کنند :

$$\text{شاخص توده بدن} = \frac{\text{وزن با مقیاس کیلوگرم}}{(\text{قد به متر})^{2}}$$

که اگر این شاخص بین ۲۰ تا ۲۵ باشد قد و وزن انسان حکایت از سالم بودن دارد اگر بین ۲۵ تا ۳۰ باشد فرد را چاق می‌دانند و چنانچه این شاخص از ۳۰ تجاوز کند، خطرناک است و باید مواظبت بیشتری از وزن انجام شود.

به این ترتیب، می‌توان گفت که : بین فشار هوا و ارتفاع از سطح دریا و نیز بین وزن و قد افراد، نوعی رابطه (همبستگی) وجود دارد. در این زمینه می‌توان مثالهای مختلفی نظیر :

ــ رابطهٔ بین کشیدن سیگار و ابتلا به بیماری سرطان ریه

ــ رابطهٔ بین مقدار باران سالانه و مقدار تولید محصولات کشاورزی

ــ رابطهٔ بین سرعت اتومبیل و طول خطّ ترمز آن

ــ رابطهٔ بین هزینه‌های تولید و مقدار تولید و ... را ارائه داد.

در این فصل، به بررسی انواع همبستگیها، مقدار و شدّت و ضعف همبستگیها، مُدل ریاضی و رابطه‌های بین متغیّرهای مختلف خواهیم پرداخت. توجّه داشته باشید که برخلاف آمار توصیفی که فقط

یک متغیّر را برای هریک از عناصر جامعه یا نمونه، اندازه‌گیری و بررسی می‌کردیم، در مبحث همبستگی، دو یا چند متغیّر از جامعه یا نمونهٔ آماری را درنظر گرفته، امکان وجود یا عدم وجود همبستگی بین آن دو یا چند متغیّر را مورد مطالعه قرار خواهیم داد و بر دو مطلب زیر تأکید بیشتری خواهیم داشت :

۱ـ آیا دو متغیر به همدیگر مرتبط هستند یا خیر؟

۲ـ اگر دو متغیر مرتبط هستند، نوع ارتباط و شدت و ضعف ارتباط چگونه است؟

تعریف همبستگی

همبستگی را می‌توان نوعی رابطهٔ کمّی (مقداری) تعریف کرد که ممکن است بین متغیّرهای مختلف وجود داشته باشد. به عبارت دیگر ؛ همبستگی خصیصه‌ایست بین دو یا چند متغیّر به نحوی که تغییر در یکی از متغیّرها، تغییری قابل پیش‌بینی درمتغیّر یا متغیّرهای دیگر را به دنبال داشته باشد. بنابراین، می‌توان با شناخت همبستگی در بسیاری از مسائل اقتصادی، مالی، فرهنگی، سیاسی، نظامی و... عمل تصمیم‌گیری را سهولت بخشید. مثلاً با محاسبهٔ اندازهٔ همبستگی بین «مقدار تولید» یک کارخانه و «مقدار ضایعات» آن کارخانه، مشکلات را بررسی کرد و یا با شناخت رابطهٔ بین «مقدار کارآیی کارکنان» و «نتایج آزمایشهای استخدامی» در یک مؤسسه، به تنظیم و تدوین سؤالات و آزمونهای استخدامی پرداخت. ذکر این نکته ضروری است که هرگاه وجود همبستگی بین دو متغیّر برای ما اثبات شد، نمی‌توان عوامل علّت ومعلول را از هم تشخیص داد، یعنی پدیدهٔ همبستگی را نباید با موضوع علّت و معلول مساوی دانست، ضمن اینکه دربرخی از انواع همبستگیها، علّت ومعلول نیز می‌تواند مطرح باشد.

علل وجود همبستگی بین متغیّرها

در بررسی رابطهٔ بین متغیّرها علل مختلفی را می‌توان مشاهده کرد. از آن جمله :

تصادفی بودن همبستگی

گاهی همبستگی بین دومتغیّر ممکن است جنبهٔ کاملاً تصادفی داشته باشد. غالباً در این موارد

با تعویض اعضای نمونه یا با زیاد کردن حجم نمونه، نتیجهٔ بررسی تغییر می‌کند.

تأثیر یک عامل شناخته شده

ممکن است وجود همبستگی بین دو متغیّر براثر تأثیر یک عامل شناخته شده باشد. برای مثال بین هزینه‌های ضروری خانواده‌ها «مثلاً غذا» وهزینه‌های غیرضروری (مثلاً تفریح و گردش)، نوعی همبستگی مشاهده می شود واین رابطه به دلیل پدیدهٔ «درآمد» است. به این معنی که، با بالا رفتن درآمد خانواده‌ها، به طور موازی، هم هزینهٔ خوراک بالا می‌رود و هم هزینهٔ تفریح وگردش. ضمن اینکه اگر درآمد این خانواده‌ها به دلیلی کاهش پیدا کند، فوراً هزینه‌های گردش را به صفر می‌رسانند، اما نمی‌توانند هزینه‌های خوراک را به صفر برسانند.

مسأله علیّت

گاهی یک متغیّر در متغیّر دیگرتأثیر دارد و باعث نوعی همبستگی بین آن متغیّرها می‌شود. مثلاً رشد درختان با مقدار آبی که به آنها داده می‌شود، نوعی رابطه دارد واین بیشتر مربوط به اصل علّت و معلولی است. بسیاری از مباحث مربوط به همبستگی از نوع مسأله علت و معلولی هستند.

انواع همبستگی

اگر بین دو پدیده، همبستگی وجود داشته باشد، نوع آن از دو حالت زیر خارج نخواهد بود :

۱ـ همبستگی مستقیم (مثبت)

۲ـ همبستگی معکوس (غیر مستقیم یا منفی)

هرگاه در یک بررسی نمونه‌ای، تغییرات عددی دو پدیده مانند x و y در یک جهت باشد، به طوری که زیاد شدن x با زیاد شدن y و یا کم شدن x با کم شدن y همراه باشد، می‌گویند x و y همبستگی مستقیم دارند. مانند رابطهٔ قد و وزن افراد در دوران رشد. اما در مواردی که تغییرات مقداری دو متغیّر x و y در دو جهت مخالف باشد، یعنی زیاد شدن یک متغیّر (مثل x) با کم شدن متغیّر دیگر (مثلاً y) همراهی کند و بالعکس، مانند رابطهٔ فشارهوا و ارتفاع از سطح دریا، همبستگی را غیرمستقیم یا معکوس می‌نامند، یکی ازمعیارهای تشخیص نوع همبستگی، ضریب همبستگی است

که در صفحات بعد به مطالعهٔ آن خواهیم پرداخت. چون این ضریب در همبستگی مستقیم، مثبت و در همبستگی معکوس،منفی می‌شود، به همین دلیل، گروهی از آمارشناسان همبستگی مستقیم را مثبت و همبستگی معکوس را منفی نیز می‌نامند.

شدّت و ضعف همبستگی (مقدار همبستگی)

مقدار همبستگی بین دو متغیّر از دو حالت زیر خارج نیست.

۱ــ همبستگی کامل (وجود ۱۰۰٪ ارتباط بین دو متغیر)

۲ــ همبستگی ناقص (وجود کمتر از ۱۰۰٪ ارتباط بین دو متغیر)

هرگاه رابطهٔ دو متغیّر x و y به‌گونه‌ای باشد که هر تغییر دراندازهٔ x تغییر متناسبی در اندازهٔ y را به همراه داشته باشد، همبستگی را کامل (صددرصد) می‌نامند، مانند رابطه بین قطر دایره و اندازهٔ محیط آن. اما اگر رابطهٔ بین دو متغیّر x و y کمتر از صددرصد باشد، همبستگی را ناقص می‌گویند، نظیر همبستگی بین قد و وزن دانش‌آموزان یک دبیرستان که می‌تواند تحت تأثیر عوامل اقتصادی، ارث، ژنتیک و نظایر آن برای افراد یکسان نباشد.

ابزارهای تشخیص همبستگی

برای تشخیص نوع همبستگی و مقدار شدّت و ضعف آن، از ابزارهای مختلفی می‌توان استفاده کرد که در این کتاب به بررسی آنها خواهیم پرداخت.

نمودار پراکندگی (دیاگرام پراکنش)

ساده‌ترین روش بررسی وجود یا عدم وجود همبستگی بین دو متغیر، رسم دیاگرام پراکنش است. برای رسم چنین دیاگرامی، باید یک دستگاه مختصّات را درنظر بگیریم و اندازهٔ یکی از صفات را تحت عنوان صفت x روی محور طولها و اندازه‌های متناظر صفت مقابل آن را تحت عنوان صفت y، روی محور عرضها قرار داده، برای هر مشاهده یک نقطه روی محورهای مختصّات به‌دست

بیاوریم، به طوری که طول آن نقطه اندازهٔ صفت x وعرض آن نقطه اندازهٔ صفت y باشد. مجموعهٔ نقاط حاصل را روی محورهای مختصّات دیاگرام پراکنش گویند. با کمک شکل کلّی نقاط دیاگرام پراکنش، می‌توان به وجود یا عدم وجود همبستگی و نیز به نوع آن پی برد.

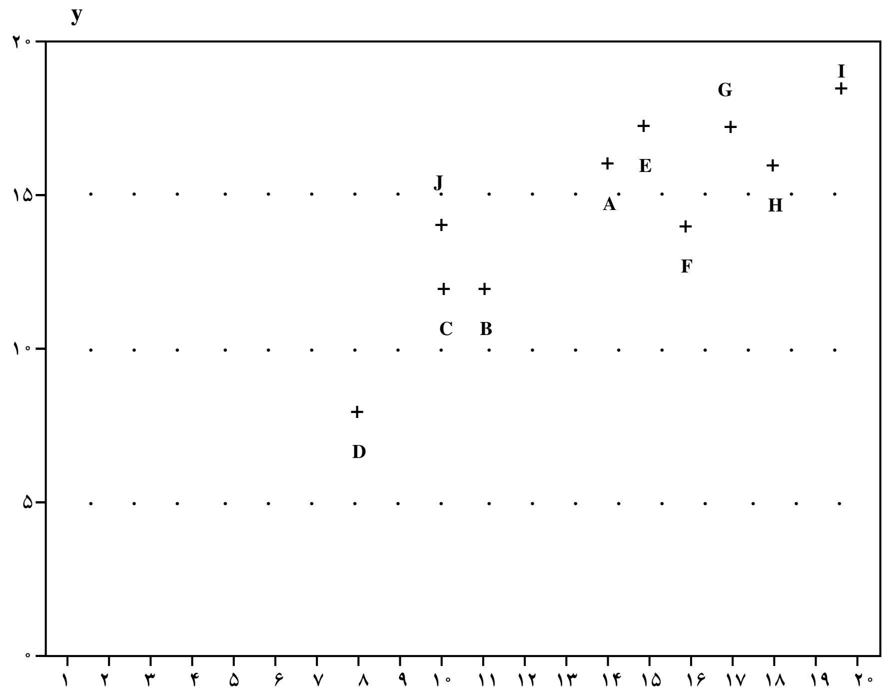
مثال ۱ــ فرض کنید نمرات ریاضی و نمرات آمار ۱۰ دانش‌آموز را طبق جدول زیر در اختیار دارید:

جدول ۱

نام دانش‌آموز	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
نمرهٔ ریاضی =x	۱۴	۱۱	۱۰	۸	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۲۰	۱۰
نمرهٔ آمار =y	۱۶	۱۲	۱۲	۸	۱۷	۱۴	۱۷	۱۶	۱۸	۱۴

دیاگرام پراکنش اطّلاعات فوق را رسم کنید.

حل: نمرات ریاضی را روی محور طولها و نمرات آمار را روی محور عرضها قرار می‌دهیم و برای هر دانش‌آموز یک نقطه روی دستگاه مختصّات به دست می‌آوریم.



نمودار ۱

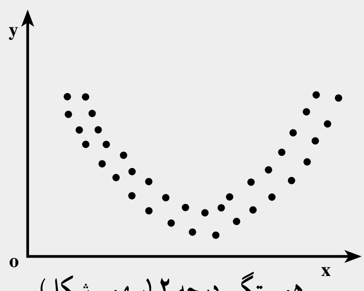
تفسیر دیاگرام پراکنش ــ برای اینکه مشخّص شود آیا بین متغیّرهای x_i و y_i همبستگی وجود دارد یا خیر؟ میانگین مقادیر $x_i(\bar{x})$ و میانگین مقادیر $y_i(\bar{y})$ را محاسبه کرده، روی دیاگرام پراکنش نقطه‌ای با طول $\bar{x}$ و عرض $\bar{y}$، به دست می‌آوریم و دو خط به موازات محورهای طولها و عرضها روی نقاط دیاگرام رسم می‌کنیم. به این ترتیب، چهار ناحیه ۱، ۲، ۳ و ۴ به‌دست می‌آید. اکنون :

(۱) ــ اگر بیشتر نقاط دیاگرام در نواحی (۱) و (۳) باشند، همبستگی مستقیم و اگر این تجمع درنواحی (۲) و (۴) مشاهده شود، همبستگی معکوس خواهد بود.

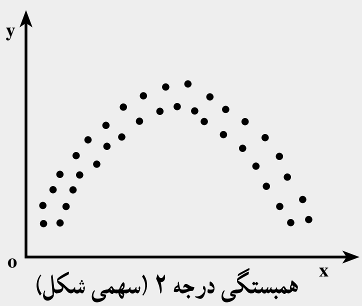
(۲) ــ اگر ضمن رعایت بند (۱) نقاط دیاگرام درست روی یک خطّ مستقیم قرار بگیرند، همبستگی کامل است و چنانچه نقاط دیاگرام در اطراف یک خطّ مستقیم باشند، همبستگی ناقص خواهد بود.

(۳) ــ چنانچه نقاط دیاگرام پراکنش به موازات خطوط سازندهٔ نواحی چهارگانه واقع شوند و یا هیچ نظام خاصی را تبعیّت نکرده، و در مناطق چهارگانه پخش شده باشند، نشانهٔ عدم همبستگی است.

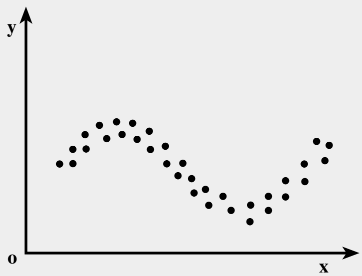
تذکّر : تفسیر فوق‌الذّکر مربوط به همبستگیهای خطّی است. توجّه داشته باشید که ممکن است بین دو یا چند متغیّر، همبستگی غیرخطّی نظیر درجه دو (سهمی)، درجه ۳ و ... نیز وجود داشته باشد، مانند دیاگرامهای پراکنش زیر که بحث و بررسی آنها خارج از برنامه این کتاب است.



همبستگی درجه ۲ (سهمی شکل)



همبستگی درجه ۲ (سهمی شکل)



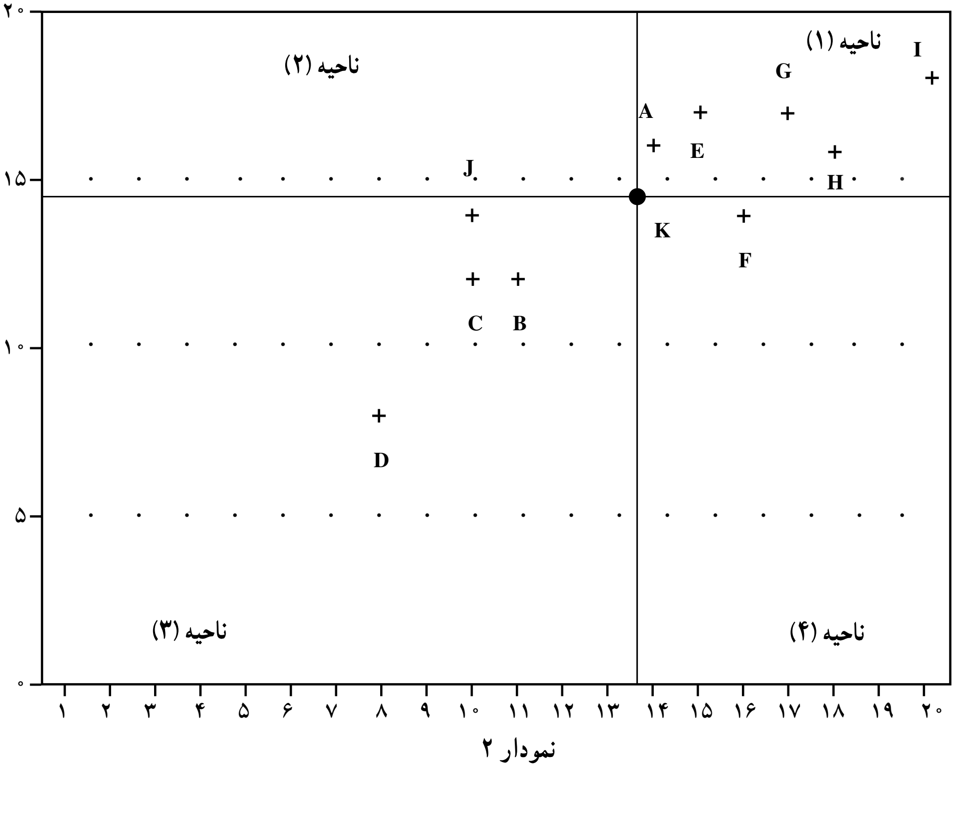
همبستگی درجه ۳

مثال ۲ــ درمثال ۱، $\overline{x}$ و $\overline{y}$ را محاسبه کرده، با کمک دیاگرام پراکنش در مورد وجود یا عدم وجود همبستگی، نوع ومقدار آن بحث کنید.

$$\overline{x}=\frac{۱۴+۱۱+۱۰+۸+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۲۰+۱۰}{۱۰}=۱۳/۹$$

$$\overline{y}=\frac{۱۶+۱۲+۱۲+۸+۱۷+۱۴+۱۷+۱۶+۱۸+۱۴}{۱۰}=۱۴/۴$$

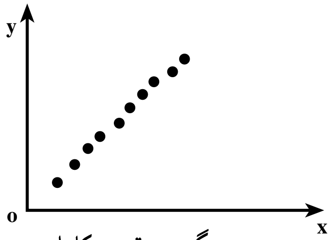
$\overline{x}=۱۳/۹$ $\quad\quad$ $\overline{y}=۱۴/۴$ $\quad\quad$ $K\left|\begin{matrix}۱۳/۹\\۱۴/۴\end{matrix}\right.$



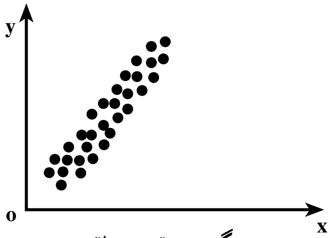
نمودار ۲

ملاحظه می‌شود که بیشتر نقاط دیاگرام، در مناطق (۱) و (۳) در اطراف یک خطّ مستقیم (نه درست روی یک خط مستقیم) واقع شده‌اند و این می‌تواند نشانهٔ همبستگی مستقیم و ناقص باشد.

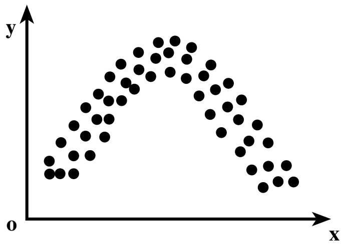
انواع دیاگرامهای پراکنش ــ در این قسمت، با تعدادی دیاگرام پراکنش، همراه با تفسیر آنها آشنا می‌شوید :



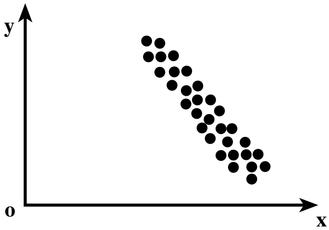
همبستگی مستقیم و کامل



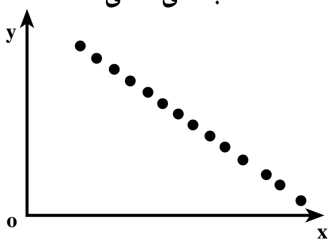
همبستگی مستقیم و ناقص



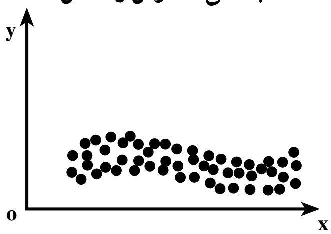
همبستگی منحنی



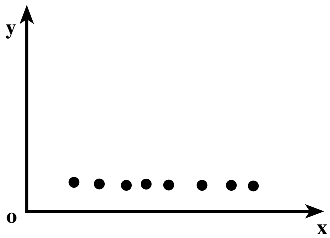
همبستگی معکوس و ناقص



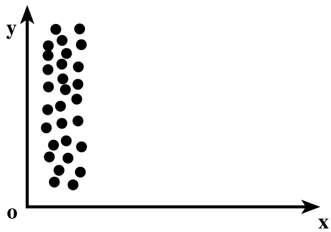
همبستگی معکوس و کامل



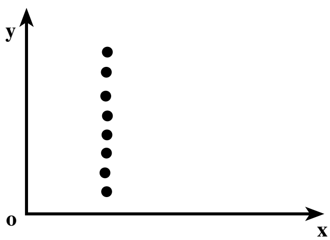
عدم همبستگی



عدم همبستگی



عدم همبستگی



عدم همبستگی

خـودآزمایی ــ قـد و وزن ۱۰ نـفر از دانش‌آموزان کلاس خودتـان را سؤال کنید و نمودار پراکنش آنها را رسم کنید.

ضریب همبستگی[1]

بعد از اینکه با کمک دیاگرام پراکنش مشخّص شد که بین دو صفت x و y، همبستگی خطّی وجود دارد، برای تعیین درجهٔ همبستگی، از پدیده‌ای به نام ضریب همبستگی استفاده خواهیم کرد، که با علامت $_{(x,y)}$. (RHO)[2] یا برآوردکنندهٔ آن r نشان داده می‌شود.

ضریب همبستگی شاخصی است که می‌تواند در فاصلهٔ ۱− تا ۱+ تغییرات را بپذیرد. علامت آن نشانه نوع همبستگی (مستقیم بودن یا معکوس بودن) و قدر مطلق آن تعیین‌کنندهٔ درجهٔ همبستگی است.

تفسیر ضریب همبستگی ــ ضریب همبستگی در دام& ۱+ ,۱−% تغییر می‌کند و به صورت زیر تفسیر می‌شود :

اگر r = +۱ باشد، همبستگی مستقیم و کامل است.

اگر r = −۱ باشد، همبستگی معکوس و کامل است.

اگر r = ۰ باشد، نشانهٔ عدم همبستگی است.

اگر ۰#|r|#۱ باشد، درصورت معنی‌دار بودن، (به اندازهٔ کافی بزرگ و قابل قبول بودن) همبستگی ناقص اعلام می‌شود. در مورد معنی‌دار بودن ضریب همبستگی، بعداً بیشتر، توضیح خواهیم داد.

چگونگی محاسبهٔ ضریب همبستگی ــ برای محاسبهٔ ضریب همبستگی، روشهای مختلفی وجود دارد که معروفترین آنها را مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد.

ضریب همبستگی گشتاوری پیرسن ــ اگر اندازه‌های n مشاهده از زوجهای مرتّب (x, y) را به صورت تصادفی در اختیار بگیریم، پس از کسب اطمینان از وجود همبستگی خطّی بین x و y، می‌توان ضریب همبستگی گشتاوری پیرسن را (برای تعیین درجه همبستگی خطّی) به صورت زیر محاسبه کرد :

۱ــ Coefficient of correlation

۲ــ علامت . برای ضریب همبستگی در کل جامعه و علامت r برای ضریب همبستگی در نمونه‌های مورد آزمایش به کار برده می‌شود.

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum (x_i - \bar{x})^۲\right]\left[\sum (y_i - \bar{y})^۲\right]}}$$ (فرمول ۱)

فرمول ۱ را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد :

$$\text{ضریب همبستگی} = \frac{\text{مجموع حاصلضرب انحرافات x‌ها از میانگینشان در انحرافات y‌ها از میانگینشان}}{\sqrt{\text{(مجموع مجذورات انحرافات x از میانگینشان)} \times \text{(مجموع مجذورات انحرافات y از میانگینشان)}}}$$

در این فرمول (فرمول ۱) اگر به‌جای اصطلاح فارسی «مجموع حاصل ...» از علامت SP_{xy} (Sum Product ...) و به‌جای اصطلاح فارسی «مجموع مجذورات ...» از علامت SS (Sum Squares ...) استفاده کنیم، فرمول ۱ را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت :

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x . SS_y}}$$ (فرمول ۲) کوتاه شده فرمول ۱

تذکّر: اگر انحراف معیار مقادیر متغیّرهای x و y در اختیار باشند، ضریب همبستگی را به‌صورت زیر نیز می‌توان محاسبه کرد :

$$r = \frac{SP_{xy}}{n . \sigma_x . \sigma_y}$$ (فرمول ۳)

و چنانچه میانگینهای دو متغیّر x و y (یا میانگین یکی از آنها) اعشاری باشد، بهتراست ضریب همبستگی را از فرمول ۴ که با فرمولهای ۱ و ۲ و ۳ هم‌ارز است، محاسبه کنیم تا با سهولت بیشتری به نتیجه برسیم.

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^۲ - \frac{(\sum x_i)^۲}{n}\right)\left(\sum y_i^۲ - \frac{(\sum y_i)^۲}{n}\right)}}$$ (فرمول ۴)

مثال ۳ـــ در جدول زیر مقدار ضریب همبستگی را با کمک :

۱) فرمول ۲،

x_i	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
y_i	۲۵	۲۰	۱۵	۱۰	۵

۲) فرمول ۳،

۳) فرمول ۴، محاسبه کنید :

حلّ :

۱) با کمک فرمول ۲

$$\bar{x} = \frac{۴۰}{۵} = ۸ \quad , \quad \bar{y} = \frac{۷۵}{۵} = ۱۵$$

جدول ۲

x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^۲$	$(y_i - \bar{y})^۲$
۴	۲۵	۴-	۱۰	۴۰-	۱۶	۱۰۰
۶	۲۰	۲-	۵	۱۰-	۴	۲۵
۸	۱۵	۰	۰	۰	۰	۰
۱۰	۱۰	۲+	۵-	۱۰-	۴	۲۵
۱۲	۵	۴+	۱۰-	۴۰-	۱۶	۱۰۰
۴۰	۷۵			$SP_{xy} = -۱۰۰$	$SS_x = ۴۰$	$SS_y = ۲۵۰$

$$\bar{x} = \frac{۴۰}{۵} = ۸ \quad , \quad \bar{y} = \frac{۷۵}{۵} = ۱۵$$

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x . SS_y}} = \frac{-۱۰۰}{\sqrt{۴۰ \times ۲۵۰}} = \frac{-۱۰۰}{\sqrt{۱۰۰۰۰}} = \frac{-۱۰۰}{+۱۰۰} = -۱$$

۲) با کمک فرمول ۳

جدول۳

x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})^۲$	$(y_i-\bar{y})^۲$
۴	۲۵	−۴	۱۰	۱۶	۱۰۰
۶	۲۰	−۲	۵	۴	۲۵
۸	۱۵	۰	۰	۰	۰
۱۰	۱۰	+۲	−۵	۴	۲۵
۱۲	۵	+۴	−۱۰	۱۶	۱۰۰
۴۰	۷۵			$\sum(x_i-\bar{x})^۲ = ۴۰$	$\sum(y_i-\bar{y})^۲ = ۲۵۰$

$$\bar{x} = \frac{۴۰}{۵} = ۸$$

$$\bar{y} = \frac{۷۵}{۵} = ۱۵$$

$$SP_{xy} = -۱۰۰$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{۴۰}{۵}} = \sqrt{۸}$$ [۱]

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{۲۵۰}{۵}} = \sqrt{۵۰}$$

$$r = \frac{SP_{xy}}{n.\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-۱۰۰}{۵\times\sqrt{۸}\times\sqrt{۵۰}} = \frac{-۱۰۰}{۵\times\sqrt{۴۰۰}} = \frac{-۱۰۰}{+۱۰۰} = -۱$$

۳) با کمک فرمول ۴

جدول ۴

x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i^۲$	$y_i^۲$
۴	۲۵	۱۰۰	۱۶	۶۲۵
۶	۲۰	۱۲۰	۳۶	۴۰۰
۸	۱۵	۱۲۰	۶۴	۲۲۵
۱۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
۱۲	۵	۶۰	۱۴۴	۲۵
۴۰	۷۵	۵۰۰	۳۶۰	۱۳۷۵

$\sum x_i = ۴۰$ و $\sum y_i = ۷۵$

$\sum x_i y_i = ۵۰۰$

$\sum x_i^۲ = ۳۶۰$ و $\sum y_i^۲ = ۱۳۷۵$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sqrt{\left[\sum x_i^۲ - \frac{(\sum x_i)^۲}{n}\right]\left[\sum y_i^۲ - \frac{(\sum y_i)^۲}{n}\right]}} = \frac{۵۰۰ - \frac{۴۰\times۷۵}{۵}}{\sqrt{\left[۳۶۰ - \frac{(۴۰)^۲}{۵}\right]\left[۱۳۷۵ - \frac{(۷۵)^۲}{۵}\right]}}$$

$$= -۱$$

۱ــ فرمول انحراف معیار همانگونه که در آمار (۱) خوانده‌اید به‌صورت $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{N}}$ می‌باشد.

معنی‌دار بودن ضریب همبستگی ـــ گفتیم که هرگاه ۱+ > r > ۱− و r ≠ ۰ باشد، اگر همبستگی معنی‌دار بود، همبستگی را ناقص می‌گویند. حال سؤال اینست که با توجّه به اینکه بین صفر تا ۱− و بین صفر تا ۱+ بی‌نهایت عدد وجود دارد، مرز قابل‌قبول بودن و قابل‌قبول نبودن ضریب همبستگی کجاست؟ جواب سؤال را باید در جدولی به نام جدول معنی‌دار بودن r جستجو کنیم. این جدول را در انتهای کتاب ملاحظه می‌کنید که شامل پنج ستون است. در ستون اوّل از سمت چپ، درجات آزادی (n − ۲) نوشته شده و چهار ستون بعدی بترتیب به . = ۰/۱، . = ۰/۰۵، . = ۰/۰۲ و . = ۰/۰۱ اختصاص داده شده‌اند. این اعداد درجات عدم اطمینان آزمون هستند که اختلاف آنها با عدد (۱) میزان اطمینان قضاوت ما را در آزمون مشخّص خواهد ساخت که اگر میزان اطمینان (احتمال درستی قضاوت) را با P نشان دهیم، می‌توان نوشت :

P = ۱ − .

به یک مدل ساده از جدول معنی‌دار بودن r نگاه کنید :

درجهٔ آزادی	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۱
۱				
۲				
۳				
۴				

برای استفاده از جدول معنی‌دار بودن r، ابتدا درجهٔ آزادی را از رابطهٔ (D.F. = n − ۲)[۱] به‌دست می‌آوریم (که در آن n تعداد زوجهای مرتّب «x ,y» است.) و سپس به جدول معنی‌دار بودن r مراجعه می‌کنیم. اگر ضریب همبستگی محاسبه شده مساوی یا بزرگتر از عدد جدول (نقطهٔ بحرانی) باشد، (که درمحّل تلاقی درجهٔ آزادی و . نوشته شده) ضریب همبستگی معنی‌دار و قابل‌قبول خواهد بود و در غیر این صورت، ضریب همبستگی معنی‌دار نیست و غیرقابل‌قبول اعلام خواهد شد. اگر r = ۰ باشد، دقیقاً می‌توان گفت که بین x و y ارتباط خطّی وجود ندارد. (ولی ممکن است بین دو متغیر مزبور، ارتباط غیر خطّی وجود داشته باشد.)

۱ــ D.F. حروف اوّل اصطلاح انگلیسی Degree of Freedom به معنای درجهٔ آزادی می‌باشد.

مثال ۴ــ فرض کنید در محاسبهٔ همبستگی بین هفت زوج مرتّب از x و y، $r = ۰/۸$ شده باشد و در جدول معنی‌دار بودن، نقاط بحرانی برای درجهٔ آزادی پنج ($D.F = ۷ - ۲ = ۵$) طبق جدول زیر مشاهده شود :

درجهٔ آزادی	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۱
۱				
۲				
۳				
۴				
۵	۰/۶۶۹۴	۰/۷۵۴۵	۰/۸۳۲۹	۰/۸۷۴۵

معلوم کنید x و y چه رابطه‌ای دارند؟

حل: با توجّه به اینکه ۰/۶۶۹۴ > ۰/۸ و ۰/۷۵۴۵ > ۰/۸ است، ضریب همبستگی در سطوح ۱۰٪ و ۵٪ معنی‌دار است (امّا در سطوح ۲٪ و ۱٪ معنی‌دار نیست. زیرا ۰/۸ از اعداد ۰/۸۳۲۹ و ۰/۸۷۴۵ کوچکتر است.) و به این ترتیب می‌توان ادّعا کرد که با ۹۵٪ اطمینان، Ç و y با همدیگر همبستگی دارند. لذا بین x و Ç همبستگی مستقیم (چون r مثبت است) و ناقص وجود دارد.

خودآزمایی: وزن و قد ده نفر از همکلاسیهای خود را که به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنید (مثلاً با قرعه‌کشی) به‌عنوان دو متغیر x_i و y_i در نظر بگیرید. دیاگرام پراکنش آنها را رسم کرده، ضریب همبستگی را بین وزن و قد محاسبه نمایید و ببینید آیا معنی‌دار هست یا خیر؟

چند نکته ضروری در ضریب همبستگی

نکتهٔ اول ــ اگر در یک بررسی بین دو متغیّر x و y (مثلاً نمرات آمار و ریاضی دانش‌آموزان کلاس الف) ضریب همبستگی فرضاً مساوی ۰/۸ و در یک بررسی دیگر بین دو متغیّر .x و .y (مثلاً نمرات آمار و ریاضی دانش‌آموزان کلاس ب) ضریب همبستگی مساوی ۰/۴ شده باشد، نمی‌توان ادّعا کرد که ارتباط دو متغیّر x و y در بررسی اوّل دو برابر شدیدتر از ارتباط دو متغیّر .x و .y در بررسی دوم می‌باشد. برای این مقایسه از ضریب تعیین، که توان دوم ضریب همبستگی است، استفاده خواهیم کرد. اگر ضریب تعیین را با علامت K نشان دهیم، می‌توان نوشت :

$$K = r^۲$$

مثلاً در مثال بالا : ضریب تعیین در بررسی اوّل $K_۱ = r_۱^۲ - (۰/۸)^۲ = ۰/۶۴$

ضریب تعیین در بررسی دوم $K_۲ = r_۱^۲ - (۰/۴)^۲ = ۰/۱۶$

همبستگی در بررسی اوّل، چهار بار شدیدتر از همبستگی در بررسی دوم است.

$$\frac{K_۱}{K_۲} = ۰/۶۴ / ۰/۱۶ = ۴$$

نکتهٔ دوم ــ مشاهدهٔ ضریب همبستگی بالا بین دو متغیّر x و y، لزوماً رابطهٔ علیّت بین x و y را اثبات نمی‌کند بلکه ممکن است عامل یا عوامل دیگری باعث و بانی ارتباط و همبستگی x و y شده باشند.

نکتهٔ سوم ــ اگر مقادیر متغیّر x را به صورت ax 0 b و مقادیر y را به صورت cy 0 d تغییر دهیم، r تغییری نخواهد کرد. (البتّه به شرط آنکه a و c هم علامت باشند.)

۳ــ معادلهٔ خط رگرسیون

اگر بین دو متغیّر تصادفی x و y همبستگی مشاهده شد، می‌توان اندازه و مقدار یکی از این دو متغیّر را بر حسب دیگری برآورد کرد. مطالعهٔ این پدیده، موضوع مبحث رگرسیون است. واژهٔ رگرسیون[۱] به معنای بازگشت و رجعت است و چون اوّلین بار دانشمندی به نام گالتون در بررسی رابطهٔ قد فرزندان پسر و قد والدین آنها، متوجّه شد که غالباً قد فرزندان پسر به متوسّط قد والدین گرایش پیدا می‌کند، یعنی قد فرزند برمی‌گردد به متوسّط قد والدین. لذا او واژهٔ رگرسیون را در این زمینه به کاربرد و از آن زمان تا به حال کاربرد این کلمه متداول شده است.

برای مثال اگر بین وزن و قد دانش‌آموزان یک دبیرستان همبستگی وجود داشته باشد، می‌توان با دانستن وزن فردی، اندازهٔ قد او را و نیز با آگاهی از قد شخص، وزن او را تخمین زد. برای این منظور کافی است روی نقاط دیاگرام پراکنش، خطّی رسم کنیم که در مقایسه با سایر خطوط ممکن، کمترین فاصله را از همهٔ نقاط دیاگرام پراکنش داشته باشد. (مناسب‌ترین خطّی باشد که می‌توان بر داده‌ها برازنده کرد)[۲] چنین خطّی را خطّ رگرسیون می‌نامند. مثلاً اگر اندازهٔ وزن (x) و اندازهٔ قد (y) ده دانش‌آموز را به صورت جدول صفحه بعد در اختیار داشته باشیم :

---

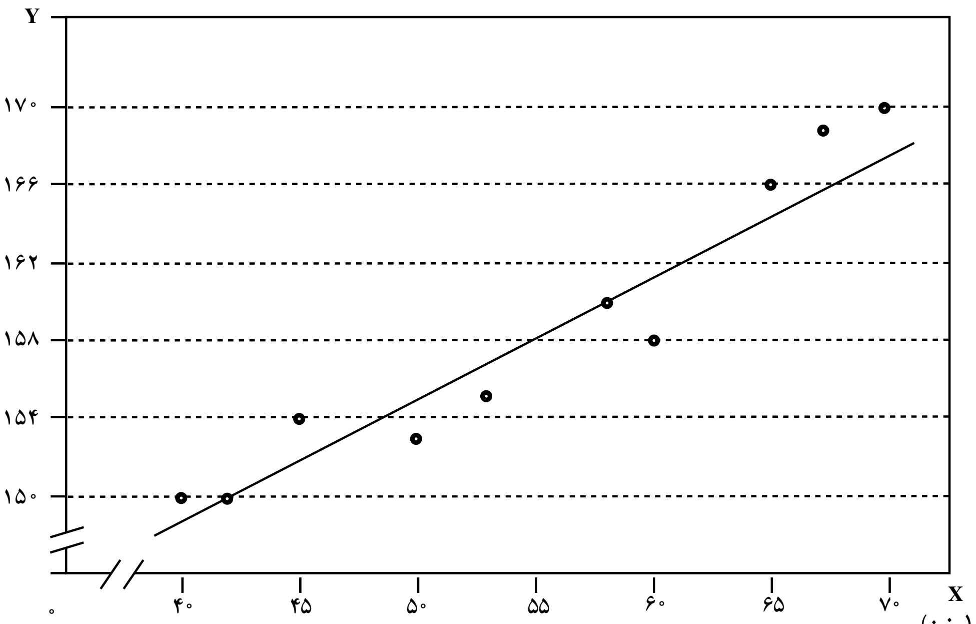
۱ ــ Regression

۲ــ مناسب‌ترین خط، خطی است که مجموع توان‌های دوم انحرافات نقاط دیاگرام با خط، حداقل باشد. (از دیگر خطوط ممکن کمتر باشد.)

جدول ۵

x_i	۴۰	۴۲	۴۵	۵۰	۵۳	۵۸	۶۰	۶۵	۶۷	۷۰
y_i	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۴	۱۵۳	۱۵۵	۱۶۰	۱۵۹	۱۶۶	۱۶۸	۱۷۰

شکل خطّ رگرسیون روی نقاط دیاگرام پراکنش، می‌تواند به صورت نمودار ۳ باشد :



نمودار ۳

برای تخمین مثلاً قد دانش‌آموزی که ۶۵ کیلوگرم وزن دارد، کافی است از نقطهٔ ۶۵ روی محور xها، عمودی به موازات محور yها رسم کنید و از محلّ تلاقی آن با خطّ رگرسیون، خطّی به موازات محور xها آن گونه رسم کنید که محور yها را قطع کند. محلّ برخورد خطّ اخیر با محور yها، برآوردی برای قد دانش‌آموزی است که وزن او ۶۵ کیلوگرم است.

چون رسم این خطّ به شیوه بالا نمی‌تواند خیلی دقیق باشد، به کمک معادله دو مجهولی درجهٔ اوّل که حالت کلّی آن به صورت زیر است، خط رگرسیون را رسم می‌کنند : به این معادله اصطلاحاً معادلهٔ خطّ رگرسیون گفته می‌شود.

(فرمول ۵) $\boxed{y = ax + b}$

در این معادله : a شیب خطّ رگرسیون را مشخّص می‌کند و از رابطهٔ $a = \frac{SP_{xy}}{SS_x}$ حاصل می‌شود. b مقدار ثابتی است که از رابطهٔ $b = \bar{y} - a\bar{x}$ به‌دست می‌آید و y مقدار برآوردی است که در ازای مقدار معیّنی از x حاصل می‌شود.

این روش را اصطلاحاً روش کمترین مربعات می‌نامند.

ضمناً برای تعیین مقدار a در معادله بالا می‌توانید از رابطه زیر نیز استفاده کنید.

$$a = r\frac{\cdot\, y}{\cdot\, x}$$

$$\text{شیب خط} = \text{ضریب همبستگی} \times \frac{\text{انحراف معیار مقادیر } y}{\text{انحراف معیار مقادیر } x}$$

برای آزمایش فرمول ۵، مثال ۵ را با کمک فرمول مزبور حل کنید.

مثال ۵ــ اگر مقادیر دو صفت x و y (مثلاً مقدار تولید و مقدار ضایعات تولید) به صورت زیر در پنج مشاهده، در اختیار باشد معادله رگرسیون را نوشته، خطّ رگرسیون را رسم کنید.

x_i	۲	۳	۱	۵	۴
y_i	۸	۱۰	۶	۱۶	۱۵

حل:

$$\bar{x} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \quad , \quad \bar{y} = \frac{۵۵}{۵} = ۱۱$$

$$a = \frac{SP_{xy}}{SS_x} = \frac{۲۷}{۱۰} = ۲/۷$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = ۱۱ - (۲/۷) \times ۳ = ۱۱ - ۸/۱ = ۲/۹$$

$y = ۲/۷x + ۲/۹$ معادله خط رگرسیون

جدول ۶

x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^۲$
۲	۸	۱−	۳−	۳	۱
۳	۱۰	۰	۱−	۰	۰
۱	۶	۲−	۵−	۱۰	۴
۵	۱۶	۲+	۵+	۱۰	۴
۴	۱۵	۱+	۴+	۴	۱
$\cdot\ x_i =$ ۱۵	$\cdot\ y_i =$ ۵۵			$SP_{xy}=$ ۲۷	$SS_x=$ ۱۰

ابتدا دیاگرام پراکنش را رسم می‌کنیم. سپس خطّ رگرسیون را روی نقاط دیاگرام برازنده می‌کنیم. برای این منظور، به x دو مقدار دلخواه را نسبت می‌دهیم (مثلاً مقادیر ۲ و ۴ را) و مقادیر متناظر y را به دست می‌آوریم (که در این مثال اعداد ۸/۳ و ۱۳/۷ می‌باشند.) و آنگاه دو نقطهٔ A و B را با مختصّات $A\Big|^{۲}_{۸/۳}$ و $B\Big|^{۴}_{۱۳/۷}$ معلوم کرده، به هم وصل می‌کنیم تا خطّ رگرسیون حاصل شود.

توجّه: مقدار a (شیب خط) را از رابطه $a=r\frac{\cdot\ y}{\cdot\ x}$ نیز می‌توان محاسبه کرد. مثلاً در مثال ۵ خواهیم داشت:

$(y_i-\bar{y})^۲$
۹
۱
۲۵
۲۵
۱۶
$SS_y=$ ۷۶

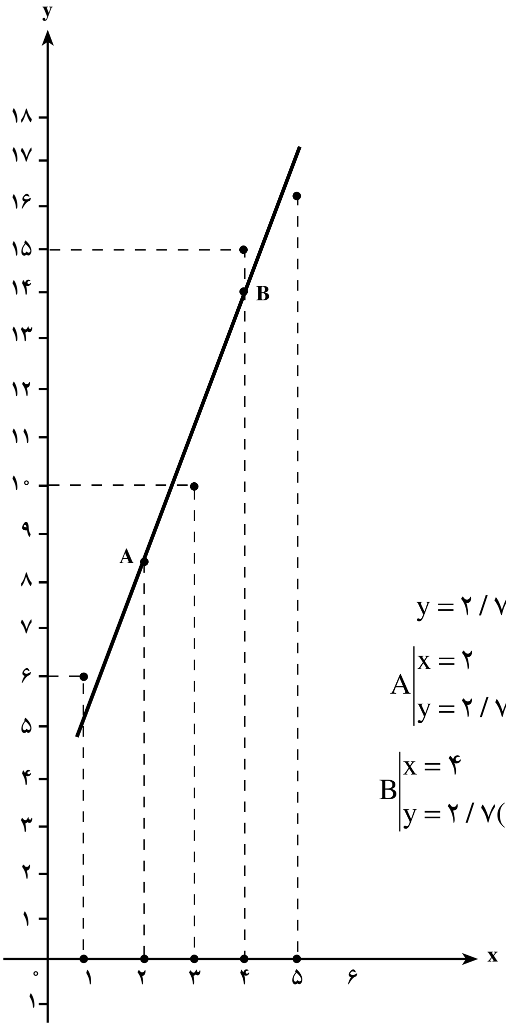
$$r=\frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x.SS_y}}=\frac{۲۷}{\sqrt{۱۰\times ۷۶}}=\frac{۲۷}{\sqrt{۷۶۰}}=\frac{۲۷}{۲۷/۶}=۰/۹۷۸$$

$$\cdot\ _x=\sqrt{\frac{\cdot\ (x_i-\bar{x})^۲}{n}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۵}}=\sqrt{۲}=۱/۴۱$$

$$\cdot\ _y=\sqrt{\frac{\cdot\ (y_i-\bar{y})^۲}{n}}=\sqrt{\frac{۷۶}{۵}}=\sqrt{۱۵/۲}=۳/۸۹$$

$$a=۰/۹۷۸\times\frac{۳/۸۹}{۱/۴۱}=۰/۹۷۸\times ۲/۷۵۸=۲/۶۹۷\simeq ۲/۷$$

ملاحظه می‌کنید که در هر دو روش، مقدار a مساوی ۲/۷ به دست می‌آید.



$$y = ۲/۷x + ۲/۹$$

$$A\left|\begin{array}{l} x = ۲ \\ y = ۲/۷(۲) + ۲/۹ = ۸/۳ \end{array}\right.$$

$$B\left|\begin{array}{l} x = ۴ \\ y = ۲/۷(۴) + ۲/۹ = ۱۳/۷ \end{array}\right.$$

نمودار ۴

با این ترتیب می‌توان گفت : خط رگرسیون، وسیله‌ای است که با کمک آن می‌توانیم مقدار یک متغیر را با توجه به مقدار متغیر دیگری که به آن وابسته است، تخمین بزنیم.

تذکّر : توجّه داشته باشید که نوشتن معادله خطّ رگرسیون و رسم این خط، زمانی صورت می‌پذیرد که ضریب همبستگی بین x و y معنی‌دار بوده باشد.

کوواریانس[1] (همپراش)

معیار دیگری که مقدار و شدّت و ضعف وابستگی بین دو متغیّر را نشان می‌دهد، کوواریانس یا همپراش است. کوواریانس به گونه‌ای محاسبه می‌شود که اگر همبستگی بین x و y خطّی مثبت باشد، علامت کوواریانس نیز مثبت است و اگر وابستگی خطّی x و y منفی باشد، علامت کوواریانس نیز منفی می‌شود. علّت این امر، آن است که اگر تغییرات x و y در یک جهت باشند، هر دو مقدار انحرافات $x_i - \bar{x}$ و $y_i - \bar{y}$ یا مثبت خواهند بود و یا منفی (هم‌علامت هستند.) و اگر تغییرات x و y در دو جهت مخالف باشند، دو مقدار $x_i - \bar{x}$ و $y_i - \bar{y}$ هم‌علامت نخواهند شد و چون کوواریانس، میانگین حاصلضرب این دو انحراف می‌باشد. یعنی :

$$\boxed{COV_{(x,y)} = \frac{SP_{xy}}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}}$$ (فرمول ۶)

بنابراین، همواره علامت کوواریانس از علامت ضریب همبستگی تبعیّت می کند (فراموش نکنیم که علامت ضریب همبستگی نیز با علامت SP_{xy} هماهنگی دارد.).

مثال ۶ــ اگر در بررسی همبستگی بین پنج مشاهده از دو متغیّر x و y ، معلوم شده باشد که $SP_{xy} = -۱۰۰$ ، مقدار کوواریانس را معلوم کنید.

$$COV_{(x,y)} = \frac{SP_{xy}}{n} = \frac{-۱۰۰}{۵} = -۲۰$$

تذکّر : اگر x و y دو متغیّر مستقل از همدیگر باشند، حتماً کوواریانس آنها مساوی صفر می‌شود، امّا عکس این مطلب لزوماً نباید درست باشد، یعنی اگر کوواریانس دو متغیّر، تصادفی مساوی صفر شد، نباید تصوّر کرد که حتماً آن دو متغیّر مستقل از هم هستند. زیرا ممکن است دو متغیّر مزبور به‌صورت غیرخطّی به یکدیگر وابسته باشند.

اگر x و y دو متغیّر تصادفی مستقل از یکدیگر باشند، کوواریانس آنها مساوی صفر خواهد بود. امّا اگر کوواریانس x و y مساوی صفر باشد، نباید لزوماً x و y را مستقل از هم دانست.

۱ــ Covariance

مثال ۷ــ اندازه دو متغیّر تصادفی x (تعداد کارمندان پنج شعبه بانک) و y (تعداد حسابهای جاری این پنج شعبه) را در جدول زیر با واحد $\frac{۱}{۱۰}$ برای متغیر x و با واحد $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ برای متغیّر y در اختیار دارید. مطلوب است محاسبه ضریب همبستگی با استفاده از فرمول ۴.

نام شعبه	x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i^۲$	$y_i^۲$
شمال	۷	۵	۳۵	۴۹	۲۵
جنوب	۸	۷	۵۶	۶۴	۴۹
شرق	۵	۴	۲۰	۲۵	۱۶
غرب	۴	۲	۸	۱۶	۴
مرکز	۴	۳	۱۲	۱۶	۹
	$\sum x_i = ۲۸$	$\sum y_i = ۲۱$	$\sum x_i y_i = ۱۳۱$	$\sum x_i^۲ = ۱۷۰$	$\sum y_i^۲ = ۱۰۳$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^۲ - \frac{(\sum x_i)^۲}{n}\right)\left(\sum y_i^۲ - \frac{(\sum y_i)^۲}{n}\right)}} = \frac{۱۳۱ - \frac{۲۸ \times ۲۱}{۵}}{\sqrt{\left(۱۷۰ - \frac{۲۸ \times ۲۸}{۵}\right)\left(۱۰۳ - \frac{۲۱ \times ۲۱}{۵}\right)}}$$

$$r = \frac{۱۳/۴}{\sqrt{۱۹۵/۲۲۸}} = \frac{۱۳/۴}{۱۳/۹۷} = ۰/۹۵۹$$ ضریب همبستگی

تمرینهای فصل سوم

۱ــ مفهوم کلی همبستگی را توضیح دهید.

۲ــ همبستگی را تعریف کنید.

۳ــ علل وجودی همبستگی را برشمارید.

۴ــ انواع همبستگی را نام ببرید و برای هرکدام ضمن ارائه مثال، تعریف مناسبی بیان کنید.

۵ــ درجات همبستگی را از نظر شدّت و ضعف همبستگی، تعریف کنید و برای هر کدام مثالی ذکر کنید.

۶ــ اگر اندازهٔ دو صفت x (مقدار تولید) و y (هزینه تولید) در ۶ ماه در یک کارخانه به‌صورت زیر باشد، با کمک دیاگرام پراکنش، نوع و درجهٔ همبستگی را معلوم کنید.

ماه	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
مقدار تولید	۴۰	۵۰	۳۰	۸۰	۱۰۰	۷۰
هزینه تولید	۴	۶	۳	۷	۱۰	۸

۷ــ اگر در پنج نمونهٔ آماری در پنج کارخانهٔ تولیدی، تعداد کارگران فنّی (x) و مقدار تولید (y) را به صورت زیر در اختیار داشته باشید، ضریب همبستگی بین این دو متغیّر را محاسبه کرده، آزمون معنی‌دار بودن ضریب همبستگی را انجام دهید.

تعداد کارگر	۴	۶	۷	۸	۱۵
مقدار تولید	۱۰	۱۲	۱۴	۱۷	۱۷

۸ــ تعداد کارمندان ۱۰ شعبه از بانکهای ملّی (x) را همراه با تعداد حسابهای جاری این بانکها (y) در اختیار دارید. ضریب تعیین را محاسبه کنید.

نام شعبه	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
تعداد کارمند	۵	۶	۷	۱۰	۴	۱۵	۲۰	۱۲	۱۶	۸
تعداد حساب جاری با واحد $\frac{۱}{۱۰۰}$	۱۲	۱۴	۱۵	۱۸	۱۰	۲۵	۳۰	۲۰	۳۰	۱۶

۹ــ در جدول زیر، معادلهٔ خطّ رگرسیون y نسبت به x را نوشته، خط رگرسیون را رسم کنید.

(x)	حجم تولید با واحد $\frac{۱}{۱۰}$	۵۰	۷۰	۶۰	۴۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۴۵
(y)	حجم ضایعات	۱۲	۱۶	۱۴	۱۰	۲۰	۱۸	۱۷	۱۱

۱۰ــ اگر $SP_{xy} = -۱۲۰$, $SS_x = ۱۰۰$ و $SS_y = ۱۴۴$ باشد، ضریب همبستگی را محاسبه کرده، معنای آن را بیان کنید.

۱۱ــ در جدول زیر کوواریانس را محاسبه کرده، مفهوم آن را توضیح دهید.

x_i	۲	۳	۴	۵	۶
y_i	−۲	−۴	−۶	−۸	−۱۰

۱۲ــ برای مطالعه رابطه بین مدّت دوام یک خودکار تولیدی و قیمت آن، یک نمونهٔ پنج تایی از مدلهای مختلف خودکار را انتخاب کرده، مدّت دوام را با واحد ساعت کار (x_i) و قیمت آنها را با واحد ۱۰۰ تومان(y_i) به صورت زیر یادداشت کرده‌ایم :

x_i	مدت دوام به ساعت	۱۰	۱۲	۱۴	۲۰	۲۴
y_i	قیمت به صد تومان	۱	۱/۲	۱/۳	۱/۵	۲

مطلوب است :

الف) محاسبهٔ ضریب همبستگی

ب) آزمون معنی‌دار بودن ضریب همبستگی و تفسیر آن

ج) محاسبهٔ ضریب تعیین

د) در صورت معنی‌دار بودن r، تعیین معادلهٔ خط رگرسیون

هـ) با کمک معادلهٔ خطّ رگرسیون معلوم کنید خودکاری که ۳۰۰ تومان قیمت دارد، چند ساعت باید کار کند؟

۱۳ــ در یک کارخانهٔ اتومبیل‌سازی، برای بررسی رابطهٔ بین سرعت اتومبیل (x_i) و طول خطّ ترمز (y_i) را، در پنج آزمایش مختلف به صورت زیر اندازه‌گیری کرده‌ایم :

x_i	سرعت اتومبیل به کیلومتر در ساعت	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰
y_i	طول خط ترمز به متر	۳	۵	۵/۵	۷	۸/۵

معلوم کنید اتومبیلی که با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت ترمز می‌کند، چند متر بعد از لحظه ترمز کردن، متوقّف خواهد شد؟ (از معادلهٔ خطّ رگرسیون کمک بگیرید.)

۱۴ـ نمرات دانش‌آموزان دو کلاس A و B را در دروس آمار و ریاضی طبق جدول زیر در اختیار دارید. ضریب تعیین را در این دو کلاس محاسبه نموده، معلوم کنید شدت ارتباط همبستگی بین نمرات آمار و ریاضی در این دو کلاس چگونه است؟

کلاس A	نمرات آمار	۱۸	۱۷	۱۵	۱۶	۱۴
	نمرات ریاضی	۱۵	۱۶	۱۳	۱۴	۱۲
کلاس B	نمرات آمار	۱۹	۱۶	۲۰	۱۸	۱۷
	نمرات ریاضی	۱۷	۱۶	۱۹	۱۴	۱۴

۱۵ـ در جدول زیر تعداد غیبتها و تعداد روزهای بیمار شدن ۱۰ دانش‌آموز کلاس را در طول ترم گذشته مشاهده می‌کنید.

نام دانش‌آموز	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
تعداد غیبتهای ترم پیش	۲	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۳	۳
تعداد روزهای بیماری	۱	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۳	۲	۱

تعداد روزهای بیماری دانش‌آموزان را x و تعداد غیبتها را y درنظر بگیرید و ضریب همبستگی بین x و y را محاسبه و تفسیر نمایید. از این مثال چه نتیجه‌ای به‌دست آوردید؟

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ــ بین x و y رابطهٔ $y = ۲x - ۱۵$ برقرار است. اگر میانگین x برابر با ۱۴ باشد، میانگین y کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

۲ــ اگر $SP_{xy} = -۹۰$ ، $SS_x = ۲۲۵$ ، $SS_y = ۱۴۴$ باشد، ضریب همبستگی کدام است؟

۱) ۰/۵− ۲) ۰/۷۵− ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷۵

۳ــ مهندسی برای نظارت کارهای ساختمانی، ۲۵ درصد کلّ هزینه را دریافت می‌کند. اگر x کلّ هزینه و y سهم مهندس باشد، ضریب همبستگی x و y کدام است؟

۱) ۱− ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۰/۲۵

۴ــ اگر $SP_{xy} = ۳۰۰$ ، $SS_x = ۲۰۰$ ، $\bar{x} = ۲$ و $\bar{y} = ۳$ باشد، معادلهٔ خطّ رگرسیون کدام است؟

۱) $y = \frac{۲}{۳}x + ۲$ ۲) $y = ۱/۵x + ۲$ ۳) $y = \frac{۲}{۳}x$ ۴) $y = ۱/۵x$

۵ــ از نمونه‌ای به حجم $n = ۵$ ضریب همبستگی بین دو متغیّر ۰/۸ است. اگر در جدول معنی‌دار بودن r با احتمال ۹۹٪ عدد ۰/۹۵۹ مشاهده شود، در این صورت با احتمال ۹۹٪ بین دو متغیّر همبستگی معنی‌دار ...

۱)کامل وجود دارد ۲) معکوس وجود دارد

۳) ناقص وجود دارد ۴) وجود ندارد

۶ــ اگر اندازه‌های دو صفت x و y به صورت زیر باشد، ضریب همبستگی کدام است؟

x_i	۱	۲	۳	۴	۵
y_i	۵−	۴−	۳−	۲−	۱−

۱) صفر ۲) ۱+ ۳) ۱− ۴) ۰/۵

۷ــ فرض کنید $y = \frac{۱}{۲}x + ۳$ معادلهٔ خطّ رگرسیون y نسبت به x باشد در صورتی که $SS_y = ۴$ و $SS_x = ۱$ باشد، ضریب همبستگی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۸ــ در کدام حالت دو متغیّر x و y، دارای همبستگی مستقیم می‌باشند؟ (r ضریب همبستگی

است.)

۱) ۰ . r . ۱   ۲) $r = ۰$ ۳) ۱ . . r . ۱   ۴) ۰ . r . ۱

۹ــ در جدول زیر، تغییرات x و y نشان داده شده است. ضریب همبستگی x و y کدام است؟

x_i	۱	۳	۵	۷
y_i	۱	۱	۱	۱

۱) ۱   ۲) صفر   ۳) ۱ .   ۴) ۰/۹۷

۱۰ــ اگر x و y دارای همبستگی کامل و معکوس باشند و $SS_x = SS_y$ باشد، معادلهٔ خطّ رگرسیون y نسبت به x کدام است؟

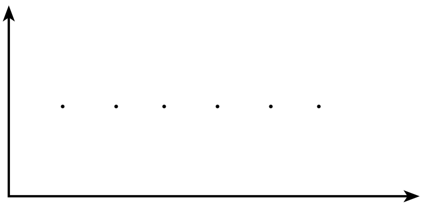
۱) $y = .\ \frac{۱}{۲}x + b$ ۲) $y = \frac{۱}{۲}x + b$

۳) $y = .\ x + b$ ۴) $y = x + b$

۱۱ــ اگر x و y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند کوواریانس آن‌ها کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۰/۵   ۳) ۰/۲۵   ۴) ۱

۱۲ــ اگر دیاگرام پراکنش زیر برای دو متغیر x و y به دست آمده باشد، چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟



۱) همبستگی آنها کامل و مستقیم است.

۲) همبستگی ندارند.

۳) همبستگی آنها کامل و معکوس است.

۴) همبستگی آنها ناقص است.

۱۳ــ اگر ضریب همبستگی بین x و y مساوی ۰/۲۵ باشد، ضریب تعیین کدام است؟

۱) ۰/۰۶۲۵   ۲) ۰/۵   ۳) ۰/۶۲۵   ۴) ۰/۲۵

«آینده از آن کسانی است که برای آن، برنامه‌ریزی کرده باشند.»

فصل چهارم

سریهای زمانی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ مفهوم سریهای زمانی و هدف از مطالعه آنها را توضیح دهد.

۲ــ سریهای زمانی را تعریف کرده، کاربرد آنها را در مسائل مالی توضیح دهد.

۳ــ عوامل مهم در سریهای زمانی را برشمرده، برای هرکدام تعریف مناسبی ارائه دهد.

۴ــ نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کند.

۵ــ خطّ گرایش را از روشهای چهارگانه : دست آزاد، میانگینهای مضاعف، میانگینهای متحرّک و حدّاقل مربعات رسم کند.

۶ــ وضعیّت آینده را با کمک خطّ روند، پیش‌بینی کند.

۷ــ منحنی سهمی گرایش را محاسبه و رسم کند.

مفهوم کلّی سریهای زمانی[1]

واژه «سری» به معنای ردیف و کلمهٔ «زمانی» به معنای نسبت داده شده به زمان می‌باشد و اصطلاح «سریهای زمانی» به معنای داده‌هایی است که با نظمی مشخّص در طی زمان تغییر می‌کنند.

به چند مثال توجّه کنید :

---

۱ ــ Time Series

ــ در دایرهٔ حسابداری یک شرکت، همه ماهه در موعد معیّنی از ماه، باید لیست حقوق ماه آیندهٔ کارکنان به صورت پیش‌نویس تهیّه شود ؛ در روز معیّنی از هر ماه، باید تغییرات احتمالی حقوق کارکنان (نظیر ترفیعات، بازنشستگی، اضافه‌کار، مرخصی، وامها، نوسانات مالیاتی و...) در لیست اعمال شود ؛ در روزهای مشخّصی از هر ماه، این لیست باید پاکنویس شده، برای تأمین اعتبار و تأیید و امضا به مسئولین امر ارائه شود و سرانجام در روزهای معیّنی حقوق کارکنان به بانک فرستاده شده، در حسابهای آنها ثبت شود.

ــ در شرکتهای بازرگانی در برخی از ماههای سال، فروش کم و در بعضی از ماهها، فروش زیاد است. مثلاً شرکتهای توزیع‌کنندهٔ لوازم التحریر در شهریورماه و مهرماه هر سال به دلیل گشایش مدارس، بیشترین فروش را دارند و در خردادماه به دلیل نزدیک شدن به انتهای سال تحصیلی، کمترین مشتریها را خواهند داشت.

ــ در کشاورزی در برخی از فصول، فعالیّت بیشتر است و در بعضی از فصول فعالیّت کمتر است.

ــ فروش نفت در آغاز زمستان و فروش یخ در تابستان افزایش پیدا می‌کند.

ــ در اوایل فصل تابستان، میوه نسبتاً گران است و بتدریج ارزان می‌شود، زیرا در آغاز تابستان، مقدار محصول کم است و در اواسط تابستان عرضه میوه زیاد می‌شود و مجدداً در اواخر تابستان که مقدار میوه‌های تابستانی کاهش پیدا می‌کند، قیمت آن رو به فزونی می‌گذارد.

ــ در کتابخانهٔ یک دبیرستان یا یک دانشکده، در روزهای قبل از امتحانات، تعداد زیادتری از دانش‌آموزان یا دانشجویان برای امانت گرفتن کتاب مراجعه می‌کنند.

مثالهای بالا، همه از نوساناتی حکایت می‌کنند که در پدیده‌های مختلف اقتصادی، اجتماعی، فرهنگی و . . . در طول زمان و در فواصل مشخّصی از ماه، فصل، سال و... رخ می‌نمایند. مطالعه و تجزیه و تحلیل این وقایع به‌صورت کلّی ما را در درک اوضاع گذشته، ارزشیابی وضعیّت حال و برنامه‌ریزی برای آینده، یاری خواهد کرد.

طبیعی است که هر تغییر که در یک پدیده به وجود می‌آید، می‌تواند تحت تأثیر عوامل مختلفی ایجاد شده باشد. مثلاً، وقتی قیمت یک کالای کشاورزی افزایش می‌یابد، باید عواملی نظیر : شرایط آب و هوا، قیمت کود و بذر، هزینه‌های آبیاری، سیستم توزیع، نحوهٔ انبارداری و . . . را مورد بررسی قرار داد. شناخت و اندازه‌گیری تأثیرات این عوامل، هدف اصلی تجزیه و تحلیل سریهای زمانی است. در این فصل از کتاب، به روشهایی توجّه خواهیم کرد که با کمک آنها خواهیم توانست با استفاده از تجارب گذشته، حوادث آینده را پیش‌بینی کنیم.

این مبحث، می‌تواند کمک مفیدی به سازمانهای مالی، صنعتی، اقتصادی و تجاری باشد. مثلاً یک متخصّص امور مالی، با شناخت درآمد شرکتهای تجاری در سالهای آینده می‌تواند سطح درآمد مالیاتی دولت را در آن سالها پیش‌بینی کند و یا مدیر یک فروشگاه بزرگ با استفاده از سریهای زمانی، متوجّه خواهد شد که چه موقع از سال و با چه مقیاسی باید کالا سفارش دهد تا بموقع بتواند تقاضای بازار را پاسخگو باشد.

تعریف سریهای زمانی

با توجّه به توضیحات بالا، می‌توان گفت؛ **رخدادهای متوالی و منظم یک پدیده را در طول یک دورهٔ معیّن از زمان «سری زمانی» گویند.**

عوامل مهمّ در سریهای زمانی

آمارشناسان تغییرات ایجاد شده در سریهای زمانی را ناشی از چهار عامل زیر می‌دانند:

گرایشهای دراز مدت (روند[۱])

گرایشهای دراز مدّت، به آن دسته از عوامل گویند که در تمام طول دورهٔ فعالیّت یک سری زمانی، به صورت منظم و پیوسته وجود دارد و باید مورد بررسی قرار گیرد. مانند تغییرات ایجاد شده در رشد جمعیّت و یا مانند پیشرفتهای تکنولوژیکی یک جامعه.

تغییرات فصلی[۲]

تغییراتی را که به طور منظّم و متوالی در فواصلی از یک سال اتفّاق می‌افتند، «تغییرات فصلی» گویند. توجّه دارید که اصطلاح «فصلی» همیشه نشانه‌ای از یک فصل شامل سه ماه نیست و گاهی برای هر نوع تغییر در دورهٔ کوتاه یا بلندی از یک سال، به کار برده می‌شود. مثل: فصل آغاز مدارس،

۱ ـ Trend　　۲ ـ Seasonal Variations

فصل امتحانات، فصل تنظیم ترازنامه شرکتها، فصل سرما. (که می‌تواند در برخی از مناطق بیش از سه ماه و در بعضی از جاها کمتر از سه ماه باشد.)

تغییرات ادواری[1] (دوره‌ای)

تغییراتی را که نشاندهندهٔ افزایش و کاهش متناوب یک فعالیّت تجاری ـ اقتصادی به‌طور مداوم، مرتّب و منظّم باشند، «تغییرات ادواری» گویند. این تغییرات را در فعالیّتهای بازرگانی «سیکلهای تجاری» نیز می‌نامند. بررسی دوره‌هایی نظیر دورهٔ بهبود، دورهٔ رونق، دورهٔ بحران و دوره کسادی و رکود در اقتصاد از این گونه هستند.

تغییرات ناگهانی[2] (بی‌قاعده ــ تصادفی ــ نامنظّم)

تغییرات ناگهانی، تغییراتی هستند که به صورتی کاملاً تصادفی و غیر منتظره اتفّاق می‌افتند. به همین دلیل، این عامل از عوامل سریهای زمانی غالباً به طور دقیق قابل پیش‌بینی نیست. تغییرات ناگهانی، می‌توانند ناشی از رفتار انسان باشند، مانند جنگ، اعتصاب و... و یا منشأ طبیعی (غیرانسانی) داشته باشند. نظیر سیل، زلزله، توفان و مواردی از این قبیل. غالباً در بررسی عوامل سریهای زمانی، آن دسته را که نمی‌توان در گرایشهای دراز مدّت، تغییرات فصلی و تغییرات ادواری طبقه‌بندی کرد، جزءِ تغییرات ناگهانی به حساب می‌آورند و به همین دلیل، گروهی از آمارشناسان به این دسته از عوامل «تغییرات پس‌ماند» نام داده‌اند.

به این ترتیب، هر سری زمانی می‌تواند حاصل جمع جبری چهار عامل فوق‌الذکر باشد، که اگر جزءِ گرایشهای دراز مدّت را با علامت «T»، جزءِ تغییرات فصلی را با علامت «S»، جزءِ تغییرات ادواری را با علامت «C» و جزءِ تغییرات ناگهانی را با علامت «I» نشان دهیم، می‌توان هر مشاهده از سری زمانی مانند y را، به صورت زیر بیان کرد:

$$\boxed{y = T + S + C + I} \qquad \text{(فرمول ۱)}$$

این مدل را «مدل حاصل جمع» می‌نامند. مدل دیگری نیز به نام «مدل حاصل ضرب» وجود دارد که دقیق امّا اندکی مشکلتر است و به شکل $y = T.S.C.I$ نوشته می‌شود.

در این کتاب، از مدل حاصل جمع استفاده می‌کنیم. هدف از بررسی سریهای زمانی، جدا کردن هر یک از چهار عامل بالا در یک سری زمانی و اندازه‌گیری میزان تأثیر آن عامل در کلّ مقدار سری

[1] ــ Cyclical Flactuations

[2] ــ Irregular Variations

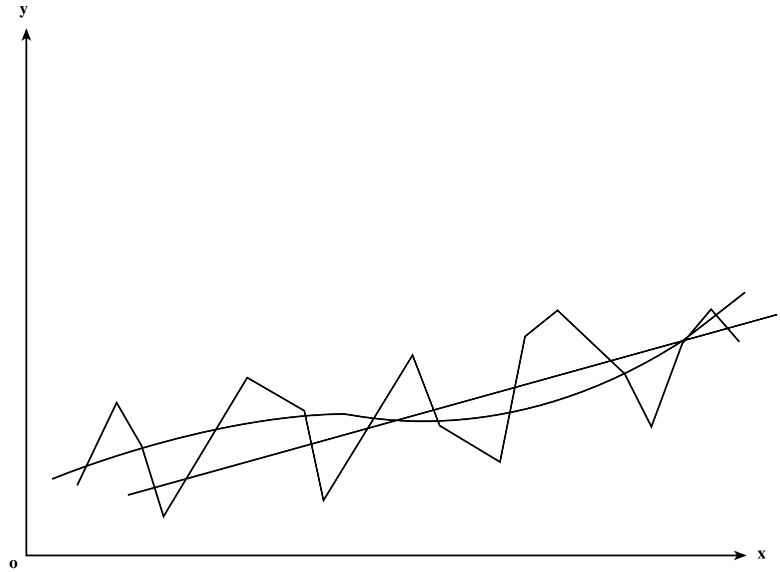
زمانی (y) است. مثلاً وقتی در دراز مدّت، قیمت یک کالا افزایش پیدا می‌کند، باید بررسی کرد که این افزایش (تغییر) به چه نسبتهایی مربوط به T، S، C و I بوده است.

چون در بین چهار عامل بالا، گرایشهای دراز مدّت یک عامل اصلی و سرنوشت‌ساز است، در این کتاب به منظور کوتاه کردن مطلب، این عامل را بیشتر مورد بحث و بررسی قرار داده‌ایم.

نمودار حرکات سریهای زمانی

برای رسم حرکات زمانی، می‌توانید از اصولی استفاده کنید که در رسم نمودارهای آماری با آنها آشنا می‌باشید. برای این منظور، کافی است عامل زمان را روی محور افقی و اندازه‌های متغیّر مورد بررسی را روی محور عمودی محورهای مختصّات قرار داده، پس از نقطه‌یابی، از اتصّال نقاط، نمودار حرکات سریهای زمانی را بسازید.

در نمودار ۱، یک مدل کلّی از سه نوع عامل گرایشهای دراز مدّت، تغییرات ادواری و تغییرات فصلی را مشاهده می‌کنید. گرایشهای دراز مدّت به وسیله خطّی مستقیم، تغییرات ادواری با خطّی انحنایی و تغییرات فصلی با پاره‌خطّهایی که نقاط را به هم وصل کرده‌اند، مشخّص شده‌اند.



نمودار ۱

تذکّر: در نمودار ۱، عامل تغییرات ناگهانی منظور نشده است. زیرا این حرکات، قابل پیش‌بینی نیست و یا پیش‌بینی آنها، بسیار مشکل است و به همین دلیل، غالباً مورد اندازه‌گیری قرار نمی‌گیرند.

روشهای رسم خط روند (خط گرایش دراز مدّت)

برای رسم خطّی مستقیم روی نمودار حرکات سریهای زمانی، چهار روش معمول است :

روش ترسیم آزاد (دست آزاد[1])

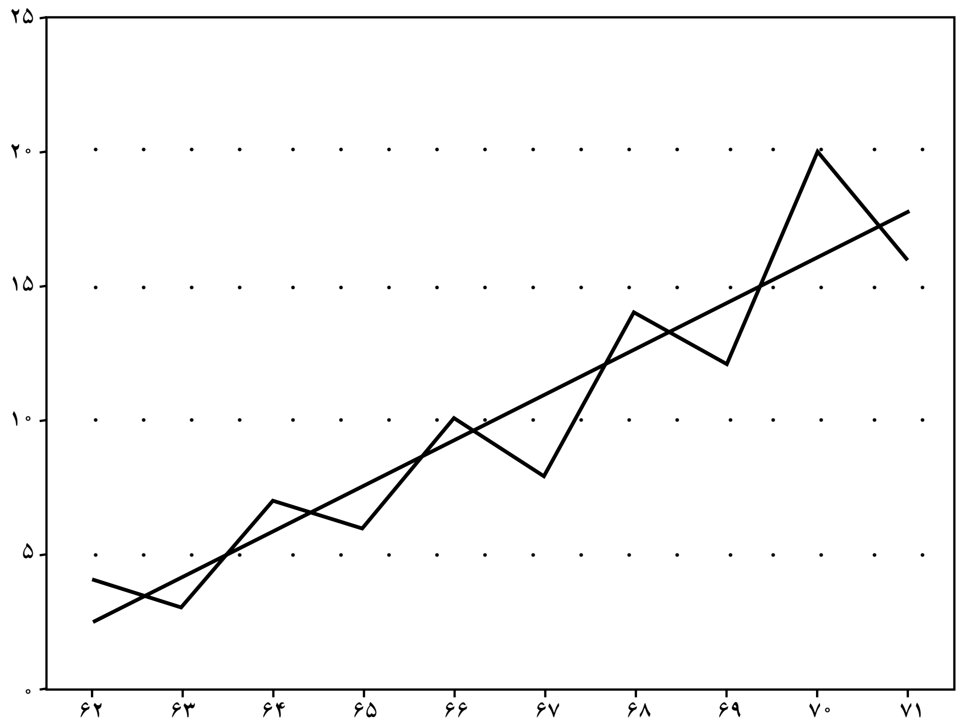
در این روش، ابتدا نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم می‌کنند. سپس به طور تقریبی، یک خطّ مستقیم روی نمودار به‌گونه‌ای رسم می‌نمایند که خطّ مذکور شیب کلّی حرکات نمودار را از جهت صعودی بودن، نزولی بودن، افقی بودن یا عمودی بودن نشان دهد. این روش از دقّت چندانی برخوردار نیست و تحت تأثیر رسم‌کننده قرار می‌گیرد، اما روش بسیار ساده‌ایست.

مثال ۱ــ در جدول زیر، فروش یک فروشگاه را در ده سال متوالی مشاهده می‌کنید. ابتدا نمودار حرکات فروش را رسم کنید. سپس خطّ گرایش را از طریقهٔ دست‌آزاد، روی آن برازنده کنید.

جدول ۱

سالها	۱۳۷۲	۱۳۷۳	۱۳۷۴	۱۳۷۵	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱
فروش	۴	۳	۷	۶	۱۰	۸	۱۴	۱۲	۲۰	۱۶

۱ــ Free Hand



نمودار ۲ــ خط روند از طریقه ترسیم آزاد

روش میانگینهای مضاعف

در این روش، پس از رسم نمودار حرکات سریهای زمانی، مقادیر سری زمانی (y_i) را به دو بخش مساوی تقسیم کرده، میانگین هر بخش را روی زمان متناظرش نقطه‌یابی می‌کنیم، سپس نقاط حاصل را به هم وصل کرده، خطّ گرایش را به‌وجود می‌آوریم.

اگر تعداد داده‌ها(y_i) فرد باشد، عدد وسطی (مربوط به زمان وسطی) را یک‌بار با گروه قبلی و یک‌بار با گروه بعدی درنظر می‌گیریم.

مثال ۲ــ اگر تولید یک کارخانه در۶ سال متوالی، طبق جدول ۲ باشد، پس از رسم نمودار حرکات تولید، خطّ گرایش را روی نمودار از طریقهٔ میانگینهای مضاعف برازنده نمایید.

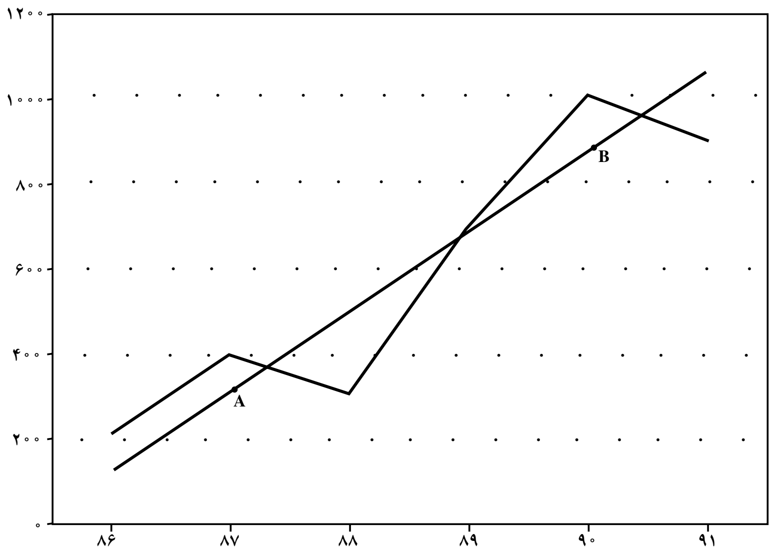
جدول ۲

سالها	۱۹۸۶	۱۹۸۷	۱۹۸۸	۱۹۸۹	۱۹۹۰	۱۹۹۱
مقدار تولید	۲۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۷۰۰	۱۰۰۰	۹۰۰

ابتدا میانگینهای مضاعف را طبق جدول ۳ مشخّص می‌کنیم. آنگاه، نمودار تولید را رسم کرده، خطّ گرایش را با داشتن دو نقطه میانگینهای مضاعف روی نمودار، برازنده خواهیم کرد.

جدول ۳

سالها	تولید = y_i	مجموع هربخش	میانگینهای مضاعف	نقطه میانگین
۱۹۸۶	۲۰۰			
۱۹۸۷	۴۰۰	۹۰۰	۹۰۰ . ۳ = ۳۰۰	A
۱۹۸۸	۳۰۰			
۱۹۸۹	۷۰۰			
۱۹۹۰	۱۰۰۰	۲۶۰۰	۲۶۰۰ . ۳ ≃ ۸۶۷	B
۱۹۹۱	۹۰۰			



نمودار ۳ ــ خط روند از طریقه میانگینهای مضاعف

روش میانگینهای متحرّک

در این روش، میانگینهای متحرّک K دوره‌ای (مثلاً سه ساله) را به این شکل محاسبه می‌کنند: ابتدا از اوّلین K داده سری زمانی میانگین می‌گیرند، سپس اوّلین داده را حذف کرده، دادهٔ بعدی را طوری به داده‌ها اضافه می‌کنند که K ثابت بماند و مجدداً میانگین را محاسبه می‌کنند. (مثلاً اگر K = ۳ باشد،

یعنی میانگینهای متحرّک را سه ساله محاسبه کنند، ابتدا میانگین مقادیر مربوط به‌سالهای اوّل، دوم و سوم را محاسبه می‌نمایند و سپس میانگین مقادیر مربوط به سالهای دوم، سوم و چهارم را. بعد از آن میانگین مقادیر مربوط به سالهای سوم، چهارم و پنجم را محاسبه خواهند کرد و...) این کار را آنقدر ادامه می‌دهند تا آخرین داده، در آخرین گروه K دوره‌ای قرار گیرد، میانگینهای حاصل را میانگینهای متحرّک گویند که تعداد آنها را می‌توان از رابطهٔ $(n-K+1)$ به‌دست آورد. n(تعداد مقادیر سری زمانی است.)

پس از محاسبهٔ میانگینهای متحرّک آنها را در مقابل وسط دورهٔ زمانی که برای آن دوره محاسبه شده‌اند، قرار می‌دهیم. مشاهده خواهیم کرد که این میانگینها نسبت به مقادیر اصلی سری زمانی، از نوسانات کمتری برخوردار هستند و تمایل دارند که سری زمانی را هموار کنند. غالباً برای بررسی اثرات روند بلند مدّت، از میانگینهای سه ساله یا پنج ساله یا هفت ساله یا... استفاده می‌کنند و اگر سری زمانی مربوط به فصول مختلف چند سال متوالی باشد، بهتر است از میانگینهای متحرّک چهار فصلی استفاده شود و چنانچه داده‌های سری زمانی در ارتباط با ماههای مختلف چند سال متوالی باشد، مفیدتر خواهد بود که از میانگینهای متحرّک دوازده ماهه استفاده کنیم.

مثال ۳ــ در جدول ۴ تولید یک کارخانه را در هشت سال متوالی مشاهده می‌کنید. ابتدا نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کنید. سپس خطّ روند را از روش میانگینهای متحرّک سه ساله، روی نمودار حرکات بگنجانید.

جدول ۴

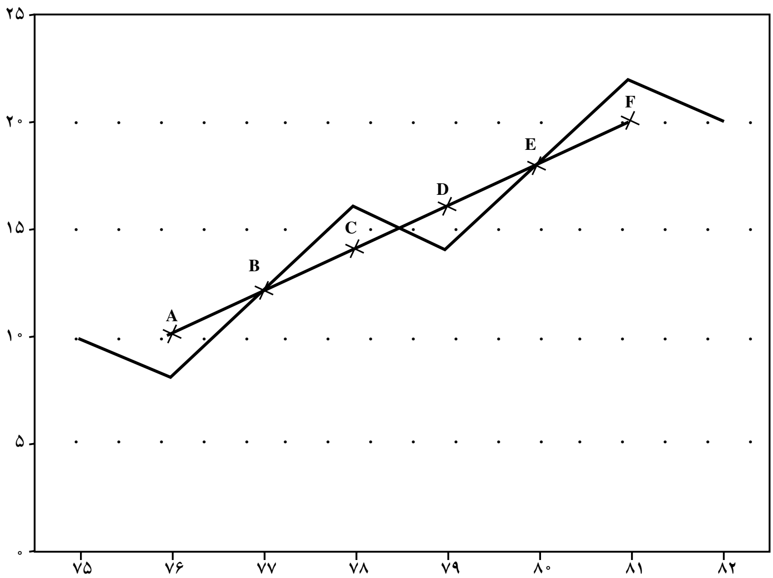
سالها	۱۳۷۵	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱	۱۳۸۲
$y_i =$ مقدار تولید	۱۰	۸	۱۲	۱۶	۱۴	۱۸	۲۲	۲۰

ابتدا میانگینهای متحرّک سه ساله را در جدول ۵ محاسبه می‌کنیم.

جدول ۵

سالها	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲
y_i	۱۰	۸	۱۲	۱۶	۱۴	۱۸	۲۲	۲۰
مجموع سه ساله متحرک	ــ	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰	ــ
میانگینهای متحرک	ــ	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	ــ
نقاط	ــ	A	B	C	D	E	F	ــ

و آنگاه به رسم نمودار و خط روند می‌پردازیم :



نمودار ۴ ــ خط روند از طریقه میانگینهای متحرک

مثال ۴ــ فروش یک فروشگاه را در فصول مختلف سه سال متوالی، در جدول ۶ در اختیار دارید، مطلوب است :

الف) محاسبهٔ میانگینهای متحرّک چهار فصلی

ب) تعدیل مقدار فروش از نظر نوسانات فصلی

ج) رسم نمودار حرکات سری زمانی (فروش) و نمودار مقادیر تعدیل شده فروش بر روی یک دستگاه محورهای مختصّات

جدول ۶

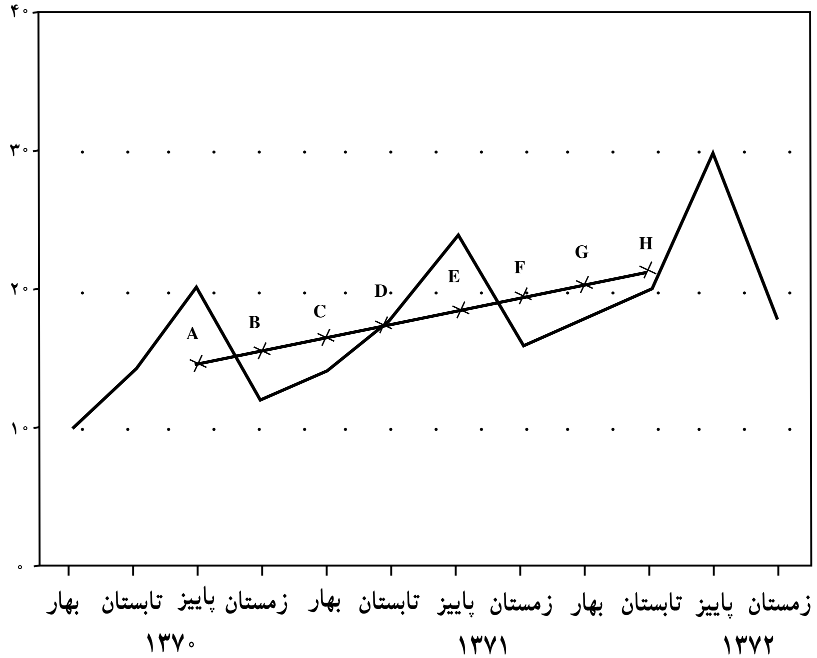
فصول / سالها	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
۱۳۷۰	۱۰	۱۴	۲۰	۱۲
۱۳۷۱	۱۴	۱۸	۲۴	۱۶
۱۳۷۲	۱۸	۲۰	۳۰	۱۸

ابتدا، مقادیر فروش مربوط به اوّلین چهار فصل ۷۰ را جمع کرده، میانگین آنها را محاسبه می‌کنیم. آنگاه مقادیر مربوط به تابستان، پاییز و زمستان ۷۰ و بهار ۷۱ را جمع کرده، میانگین آنها را معلوم می‌کنیم. در مرحلهٔ بعد، مقادیر مربوط به پاییز و زمستان سال ۷۰ و بهار و تابستان سال ۷۱ را جمع کرده و میانگین آنها را معلوم می‌کنیم. این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که مقادیر فروش(y_i) چهار فصل مربوط به سال ۷۲ را جمع کرده، میانگین آنها را محاسبه کنیم. (به جدول ۷ نگاه کنید.) در این مثال چون مجموعهای متحرّک چهار فصلی دقیقاً مقابل زمانهای مشخّص قرار نمی‌گیرند، یک‌بار دیگر مجموعهای متحرّک ۲ دوره‌ای را محاسبه می‌کنیم، تا میانگینها درست متناظر با زمانهای جدول فروش باشند. به همین دلیل، برای محاسبهٔ میانگینها، مقسوم علیه ۸ منظور شده است.(مثلاً عدد ۱۱۶ مجموع ۸ عدد است.)

جدول ۷

سالها	فصول	فروش = y_i	مجموعهای متحرک چهارفصل	دومین مجموعهای متحرّک	میانگینهای متحرک (T_i)	نقاط میانگین
۱۳۷۰	بهار	۱۰				
۱۳۷۰	تابستان	۱۴	۵۶			
۱۳۷۰	پاییز	۲۰	۶۰	۱۱۶	۱۱۶/ ۸=۱۴/۵	A
۱۳۷۰	زمستان	۱۲	۶۴	۱۲۴	۱۲۴/ ۸=۱۵/۵	B
۱۳۷۱	بهار	۱۴	۶۸	۱۳۲	۱۳۲/ ۸=۱۶/۵	C
۱۳۷۱	تابستان	۱۸	۷۲	۱۴۰	۱۴۰/ ۸=۱۷/۵	D
۱۳۷۱	پاییز	۲۴	۷۶	۱۴۸	۱۴۸/ ۸=۱۸/۵	E
۱۳۷۱	زمستان	۱۶	۷۸	۱۵۴	۱۵۴/ ۸=۱۹/۲۵	F
۱۳۷۲	بهار	۱۸	۸۴	۱۶۲	۱۶۲/ ۸=۲۰/۲۵	G
۱۳۷۲	تابستان	۲۰	۸۶	۱۷۰	۱۷۰/ ۸=۲۱/۲۵	H
۱۳۷۲	پاییز	۳۰				
۱۳۷۲	زمستان	۱۸				

اکنون ابتدا نمودار حرکات سری زمانی را رسم می‌کنیم، آنگاه نقاط میانگینهای متحرّک را روی محورهای مختصّات مشخّص کرده، به هم وصل می‌کنیم. در نمودار ۵ مشاهده می‌کنید که نوسانات میانگینهای متحرّک به مراتب آرامتر از نوسانات اندازه‌های اصلی (y_i) است.



نمودار ۵ ـــ خط روند از طریقه میانگین‌های متحرک تعدیل شده

روش کمترین مربعّات

دقیق‌ترین روش به دست آوردن خطّ روند بلند مدّت، استفاده از روش رگرسیونی است که در فصل قبل با معادلهٔ آن آشنا شده‌اید. شکل کلّی معادله به‌صورت $y. = ax + b$ بود. در این روش، خطّ گرایش را با استفاده از تابع خطّی رسم می‌کنیم.

همانگونه که در خط رگرسیون در فصل قبل دیدید : $y = ax + b$

$$a = \frac{SP_{xy}}{SS_x} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

اگر تمام عوامل صورت و مخرج کسر بالا را در n ضرب کنیم، خواهیم داشت :

(فرمول ۲)

$$a = \frac{n.\ x_i y_i - .\ x_i .\ y_i}{n.\ x_i^{2} - (.\ x_i)^{2}} \qquad , \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

در روابط بالا :

n = تعداد عوامل سری زمانی (سالها، ماهها و...) می‌باشد.

y_i = مقادیر تعدیل شدهٔ سری زمانی است.

a = ضریب تغییر سری زمانی است که تندی شیب خطّ را نشان می‌دهد. (ضریب زاویه خطّ).

b = میانگین مقدار سری زمانی است که ارتفاع خطّ روند را در سال وسطی (یا به طور کلّی در زمان وسطی) مشخّص می‌کند.

x_i = بیانگر زمان است که نقش متغیّر مستقل را به عهده دارد. برای تعیین اعداد x در سالهای مختلف به ترتیب اعداد، ۰، ۱، ۲ و ... را در نظر می‌گیریم (مثال ۷).

اما چنانچه بتوانیم مقادیر x_i را با تغییر مبدأ از زمان آغاز بررسی سری زمانی به زمان وسط، به‌گونه‌ای تنظیم کنیم که $.\ x_i = 0$ بشود (که این مطلب را در چند سطر بعد بیشتر توضیح خواهیم داد.) در آن صورت فرمولهای بالا به شکل زیر خلاصه خواهند شد :

(فرمول ۳)

$$a = \frac{.\ x_i y_i}{.\ x_i^{2}}$$

$$b = \bar{y}$$

و برای اینکه مجموع اندازه‌های x (یعنی $.\ x_i$) مساوی صفر بشود، کافی است، هرگاه تعداد سالها فرد باشد، مقابل سال وسطی صفر منظور کرده، سالهای قبل از آن را به ترتیب، ۱−، ۲−، ۳− و ... و سالهای بعد از آن به ترتیب ۱+، ۲+، ۳+ و ... قرار دهیم و هرگاه تعداد سالها زوج باشد، دو سال وسطی را در نظر گرفته، مقابل سال بالاتری ۱− و مقابل سال پایین‌تری ۱+ را برای x اختصاص داده، اعداد ۳−، ۵−، ۷− و ... را قبل از ۱− و اعداد ۳+، ۵+، ۷+ و ... را بعد از ۱+ درنظر می‌گیریم و به این ترتیب، هرگاه تعداد سالها زوج باشد، x تعداد دوره‌های تناوب شش ماهه را قبل و بعد از زمان وسطی نشان می‌دهد.

مثال ۵ــ مقدار تولید یک کارخانه را در هفت سال متوالی در جدول ۸ مشاهده می‌کنید. نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خطّ روند را روی نمودار حرکات از طریقهٔ کمترین مربّعات بگنجانید.

جدول ۸

سالها	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱	۱۳۸۲
مقدار تولید y_i	۱۲۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۷۰	۱۶۰	۲۰۰	۱۱۰

ابتدا در جدول ۹، محاسبات لازم را برای تعیین a و b انجام می‌دهیم.

جدول ۹

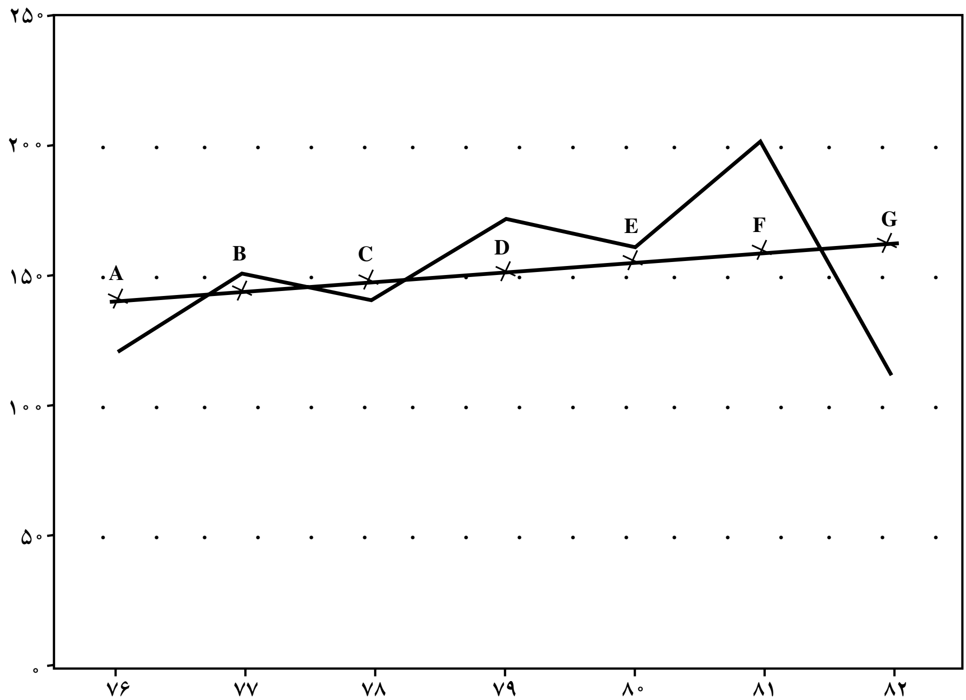
سالها	y_i	x_i	x_iy_i	$x_i^۲$	$y. =$ مقادیر تعدیل شده سری زمانی	نقاط
۷۶	۱۲۰	−۳	−۳۶۰	۹	$y_{(۶۶)} = ۳/۲(-۳)+۱۵۰=۱۴۰/۴$	A
۷۷	۱۵۰	−۲	−۳۰۰	۴	$y_{(۶۷)} = ۳/۲(-۲)+۱۵۰=۱۴۳/۶$	B
۷۸	۱۴۰	−۱	−۱۴۰	۱	$y_{(۶۸)} = ۳/۲(-۱)+۱۵۰=۱۴۶/۸$	C
۷۹	۱۷۰	۰	۰	۰	$y_{(۶۹)} = ۳/۲(۰)+۱۵۰=۱۵۰$	D
۸۰	۱۶۰	+۱	۱۶۰	۱	$y_{(۷۰)} = ۳/۲(+۱)+۱۵۰=۱۵۳/۲$	E
۸۱	۲۰۰	+۲	۴۰۰	۴	$y_{(۷۱)} = ۳/۲(+۲)+۱۵۰=۱۵۶/۴$	F
۸۲	۱۱۰	+۳	۳۳۰	۹	$y_{(۷۲)} = ۳/۲(+۳)+۱۵۰=۱۵۹/۶$	G
	۱۰۵۰		=. ۹۰	=. ۲۸		

$$a = \frac{.\ x_iy_i}{.\ x_i^۲} = \frac{۹۰}{۲۸} = ۳/۲۱ \simeq ۳/۲$$

$$b = \bar{y} = \frac{۱۰۵۰}{۷} = ۱۵۰$$

$$y. = ۳/۲x + ۱۵۰$$

اکنون با کمک معادلهٔ اخیر، مقادیر فروش (y_i) را تعدیل می‌کنیم. برای این مقصود، کافی است برای هرسال در معادله به جای x مقدار x آن سال را قرار دهیم. برای سهولت کار می‌توانید فقط مقادیر تعدیل شدهٔ اوّلین سال و آخرین سال را به‌دست آورده، خطّ را رسم کنید.



نمودار ۶

مثال ۶ــ فرض کنید مقدار ضایعات تولید یک کارخانه را در ده سال متوالی، طبق جدول ۱۰ در اختیار دارید. خطّ روند را روی منحنی نوسانات، از طریقهٔ کمترین مجذورات برازنده کنید :

جدول ۱۰

سال	۱۳۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲
ضایعات	۲۰	۲۲	۱۶	۱۴	۱۸	۱۲	۱۰	۶	۸	۴

ابتدا در جدول ۱۱، عملیّات لازم را برای تعدیل کردن مقادیر انجام می‌دهیم. سپس منحنی حرکات و خطّ روند را رسم می‌کنیم.

جدول ۱۱

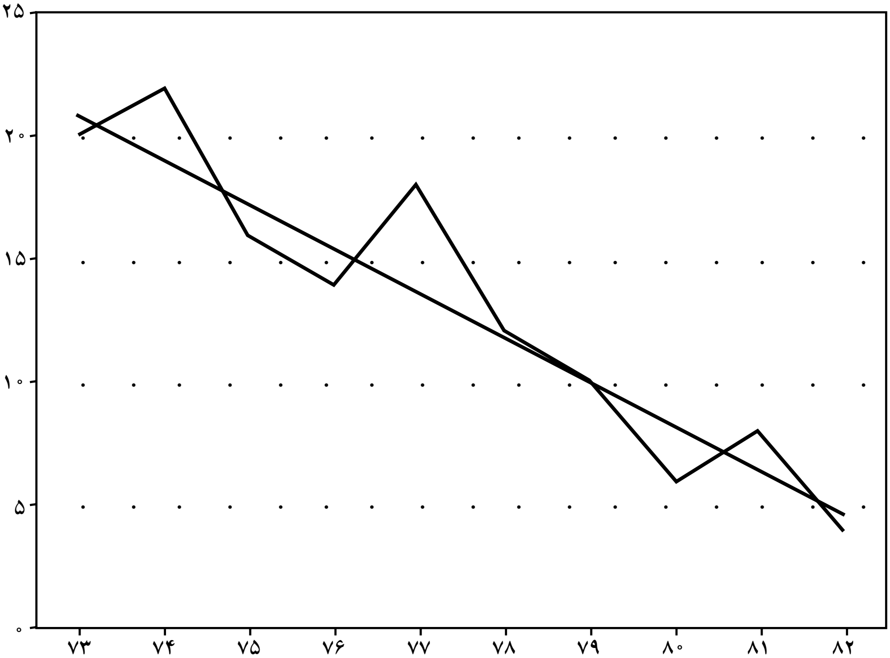
نقاط	مقادیر تعدیل شدهٔ ضایعات = .y	x_iy_i	$x_i^۲$	x_i	y_i	سالها
A	$y_{(۷۳)}$ = . ۰/۹۳(. ۹)+۱۳=۲۱/۳۷	. ۱۸۰	۸۱	. ۹	۲۰	۷۳
		. ۱۵۴	۴۹	. ۷	۲۲	۷۴
		. ۸۰	۲۵	. ۵	۱۶	۷۵
		. ۴۲	۹	. ۳	۱۴	۷۶
		. ۱۸	۱	. ۱	۱۸	۷۷
		+۱۲	۱	+۱	۱۲	۷۸
		+۳۰	۹	+۳	۱۰	۷۹
		+۳۰	۲۵	+۵	۶	۸۰
		+۵۶	۴۹	+۷	۸	۸۱
B	$y_{(۸۲)}$ = . ۰/۹۳(+۹)+۱۳=۴/۶۳	+۳۶	۸۱	+۹	۴	۸۲
		. ۳۱۰	۳۳۰		۱۳۰	

$$a = \frac{.\ x_iy_i}{.\ x_i^{۲}} = \frac{.\ ۳۱۰}{۳۳۰} = .\ ۰/۹۳$$

$$b = \frac{.\ y_i}{N} = \frac{۱۳۰}{۱۰} = ۱۳$$

$$y. = .\ ۰/۹۳x + ۱۳$$

تذکّر: توجّه دارید که در این مثال، که تعداد سالها زوج است، در ستون x_i عدد صفر متناظر با زمان معیّنی نیست. بنابراین x تعداد دوره‌های شش ماهه را نشان می‌دهد.



نمودار ۷

پیش‌بینی مقادیر سریهای زمانی

برای پیش‌بینی مقادیر یک سری زمانی، دقیق‌ترین روش، استفاده از معادلهٔ خطّ رگرسیون بلندمدّت است. خطّی که با کمک معادله $y' = ax + b$ و با ضرایب a و b به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

$$a = \frac{n.\ x_i y_i - .\ x_i.\ y_i}{n.\ x_i^{2} - (.\ x_i)^{2}}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

بعد از تعیین معادلهٔ رگرسیونی، از مُدل $y = T + S + C + I$ و حذف عامل تغییرات ناگهانی (I) به صورت $y = T + S + C$ استفاده می‌کنیم. (حذف I به این دلیل است که پیش‌بینی تغییرات ناگهانی برایمان مقدور نیست.)

مثال ۷ــ در مثال ۴ (که قبلاً حل کرده‌ایم) معادلهٔ خطّ رگرسیونی را تنظیم کنید و با ثابت فرض کردن تغییرات ناگهانی و دوره‌های تجاری، مقدار پیش‌بینی فروش را برای بهار و تابستان سال ۱۳۷۳ برآورد کنید.

ابتدا جدول فروش را مجدداً درنظر می‌گیریم :

جدول ۱۲

فصول / سالها	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
۱۳۷۰	۱۰	۱۴	۲۰	۱۲
۱۳۷۱	۱۴	۱۸	۲۴	۱۶
۱۳۷۲	۱۸	۲۰	۳۰	۱۸

اکنون در جدول ۱۳ محاسبات a و b و معادله رگرسیونی را انجام می‌دهیم.

جدول ۱۳

سال	فصل	y_i	x_i	x_i^2	x_iy_i	
۷۰	بهار	۱۰	۰	۰	۰	
۷۰	تابستان	۱۴	۱	۱	۱۴	$a=\frac{n.\ xy-.\ x.\ y}{n.\ x^{۲}-(.\ x)^{۲}}=$
۷۰	پاییز	۲۰	۲	۴	۴۰	
۷۰	زمستان	۱۲	۳	۹	۳۶	$\frac{(۱۲\times۱۳۱۴)-(۶۶\times۲۱۴)}{(۱۲\times۵۰۶)-(۶۶)^{۲}}=۰/۹۶$
۷۱	بهار	۱۴	۴	۱۶	۵۶	
۷۱	تابستان	۱۸	۵	۲۵	۹۰	$b=\bar{y}-a\bar{x}=۱۷/۸۳-(۰/۹۶)\times\frac{۶۶}{۱۲}$
۷۱	پاییز	۲۴	۶	۳۶	۱۴۴	
۷۱	زمستان	۱۶	۷	۴۹	۱۱۲	$b=۱۲/۵۵$
۷۲	بهار	۱۸	۸	۶۴	۱۴۴	معادله خط رگرسیون $y.=۰/۹۶x+۱۲/۵۵$
۷۲	تابستان	۲۰	۹	۸۱	۱۸۰	
۷۲	پاییز	۳۰	۱۰	۱۰۰	۳۰۰	
۷۲	زمستان	۱۸	۱۱	۱۲۱	۱۹۸	
		۲۱۴	۶۶	۵۰۶	۱۳۱۴	

اکنون با کمک معادله خط روند ($y_{\cdot} = ۰/۹۶x + ۱۲/۵۵$) مقادیر مربوط به روند بلند مدت را به شکلی که در جدول زیر نشان داده‌ایم معلوم می‌کنیم.

جدول ۱۴

سال	فصل	y_i	x_i	$T =$ روند بلند مدت $= y_{\cdot}$
۷۰	بهار	۱۰	۰	$y_{\cdot} = ۰/۹۶(۰) + ۱۲/۵۵ = ۱۲/۵۵$
۷۰	تابستان	۱۴	۱	$y_{\cdot} = ۰/۹۶(۱) + ۱۲/۵۵ = ۱۳/۵۱$
۷۰	پاییز	۲۰	۲	$y_{\cdot} = ۰/۹۶(۲) + ۱۲/۵۵ = ۱۴/۴۷$
۷۰	زمستان	۱۲	۳	$= ۱۵/۴۳$
۷۱	بهار	۱۴	۴	۱۶/۳۹
۷۱	تابستان	۱۸	۵	۱۷/۳۵
۷۱	پاییز	۲۴	۶	۱۸/۳۱
۷۱	زمستان	۱۶	۷	۱۹/۲۷
۷۲	بهار	۱۸	۸	۲۰/۲۳
۷۲	تابستان	۲۰	۹	۲۱/۱۹
۷۲	پاییز	۳۰	۱۰	۲۲/۱۵
۷۲	زمستان	۱۸	۱۱	$y_{\cdot} = ۰/۹۶(۱۱) + ۱۲/۵۵ = ۲۳/۱۱$
		۲۱۴	۶۶	

حالا با کمک مدل کلی سری زمانی یعنی :

$$y = T + C + S + I$$

و بعد از حذف I یعنی تغییرات ناگهانی، (به دلیل این‌که پیش‌بینی تغییرات ناگهانی یا بسیار مشکل و یا غیرممکن است.) به صورت $y_i = T + C + S$ [1] تأثیر نوسانات فصلی را برای فصول مختلف معلوم می‌کنیم. برای این‌کار اختلاف هر یک از مقادیر اولیه (y_i) را با مقدار روند بلند مدت تعدیل شده (T_i) به دست آورده (جدول ۱۵)، برای هر فصل میانگین تأثیرات را محاسبه می‌کنیم (جدول ۱۶).

۱ـ از رابطه $y_i = T + C + S$ رابطه $T = C + S \cdot y_i$ نتیجه خواهد شد.

جدول ۱۵

y_i	T_i	$y_i - T_i$
۱۰	۱۲/۵۵	-۲/۵۵
۱۴	۱۳/۵۱	۰/۴۹
۲۰	۱۴/۴۷	۵/۵۳
۱۲	۱۵/۴۳	-۳/۴۳
۱۴	۱۶/۳۹	-۲/۳۹
۱۸	۱۷/۳۵	۰/۶۵
۲۴	۱۸/۳۱	۵/۶۹
۱۶	۱۹/۲۷	-۳/۲۷
۱۸	۲۰/۲۳	-۲/۲۳
۲۰	۲۱/۱۹	-۱/۱۹
۳۰	۲۲/۱۵	۷/۸۵
۱۸	۲۳/۱۱	-۵/۱۱

جدول ۱۶

سال‌ها / فصول	۱۳۷۰	۱۳۷۱	۱۳۷۲	مجموع تغییرات فصول	میانگین تغییرات فصول
بهار	-۲/۵۵	-۲/۳۹	-۲/۲۳	-۷/۱۷	-۲/۳۹
تابستان	۰/۴۹	۰/۶۵	-۱/۱۹	-۰/۰۵	-۰/۰۱۶۶
پاییز	۵/۵۳	۵/۶۹	۷/۸۵	۱۹/۰۷	+۶/۳۵۶۶
زمستان	-۳/۴۳	-۳/۲۷	-۵/۱۱	-۱۱/۸۱	-۳/۹۳۶۶

حالا اگر مقادیر x را در معادلهٔ y. = ۰/۹۶x + ۱۲/۵۵ جایگذاری کنیم، مقادیر روند بلند مدّت (T) حاصل می‌شوند. مثلاً برای تعیین مقدار روند بلند مدّت در بهار ۱۳۷۳ و تابستان ۱۳۷۳ که مقدار x آنها به ترتیب ۱۲ و ۱۳ خواهد بود، خواهیم داشت:

برآورد بلند مدّت در بهار ۷۳ ← ۲۴/۰۷ = ۱۲/۵۵ + (۱۲)۰/۹۶ = (بهار ۷۳) .y

برآورد روند بلند مدّت درتابستان ۷۳ ← ۲۵/۰۳ = ۱۲/۵۵ + (۱۳)۰/۹۶ = (تابستان۷۳) .y

حال، اگر مقدار نوسان فصلی مربوط به فصول بهار و تابستان ۷۳ را از جدول ۱۵ به مقدار روند بلند مدّت اضافه کنیم، رقم پیش‌بینی فروش برای فصول بهار و تابستان ۱۳۷۳ معلوم خواهد شد.

برای مثال، در مورد بهار سال ۱۳۷۳ خواهیم داشت:

$$۲۴/۰۷+(-۲/۳۹)=۲۱/۶۸$$

و برای تابستان سال ۱۳۷۳ خواهیم داشت:

$$۲۵/۰۳+(-۰/۰۱۶۶)=۲۵/۰۱۳۴$$

تذکّر مجدداً این مطلب لازم است که در این مثال، مقدار برآورد فروش را شامل تغییرات فصلی و روند دراز مدّت درنظر گرفته‌ایم.

روش محاسبه و رسم منحنی سهمی گرایش

در سریهای زمانی ممکن است مشاهده شود که تغییرات سری زمانی غیر خطّی است. در این موارد، چنانچه تغییرات نمودار از تابع درجهٔ دوم تبعیّت کند، شکل کلّی تابع به‌صورت $y = ax^۲ + bx + c$ خواهد بود. در این تابع، مقادیر a، b و c را مقادیر ثابت و x و y را مقادیر متغیّر می‌نامند. مقادیر b و c می‌توانند مثبت، منفی و یا صفر باشند و نمودار تابع درجهٔ دوم تحت تأثیر این مقادیر، شکلهای مختلفی به‌خود می‌گیرد.

مثال ۸ــفرض کنید تابع $y = x^۲ - ۶x + ۸$ مربوط به تغییرات یک سری زمانی باشد. نمودار این تابع را رسم کرده، ویژگیهای آن را توضیح دهید.

حل: برای رسم نمودار تابع بالا، کافی است، مقادیر مختلفی به x نسبت داده، مقادیر متناظر y را از تابع به‌دست آوریم و روی محورهای مختصّات، نقاط مذکور را معلوم کرده، به هم وصل کنیم.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۸	۳	۰	۱-	۰	۳	۸

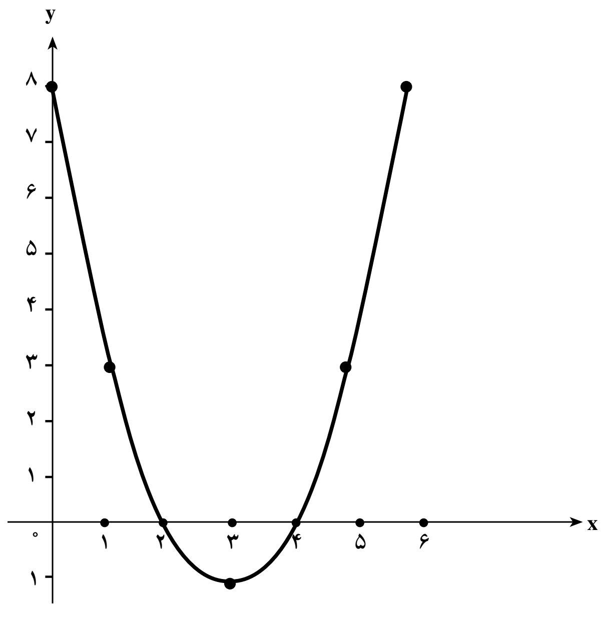
مشاهده می‌شود که این تابع محور عرضها را در یک نقطه قطع می‌کند که مقدار آن در تابع، معادل مقدار ثابت c می‌باشد و تغییر دادن این مقدار، موجب انتقال تابع به بالا یا پایین دستگاه

محورهای مختصّات خواهد بود و این تابع با محور طولها در دو نقطه برخورد دارد، که این دو نقطه معادله را صفر می‌کنند. به این دو مقدار «ریشه‌های معادله» گفته می‌شود. معادله‌های درجهٔ دو، دارای دو ریشه خواهند بود، مگر در موارد زیر :

۱ــ اگر تابع در پایین‌ترین نقطه خود با محور طولها مماس باشد، که در این صورت، فقط یک ریشه خواهد داشت.

۲ــ اگر نمودار، در بالای محور طولها واقع شود که ریشه نخواهد داشت.

اکنون به شکل منحنی تابع توجّه کنید :



نمودار ۸

تمرینهای فصل چهارم

۱ــ مفهوم سریهای زمانی را توضیح دهید.

۲ــ سریهای زمانی را تعریف کنید و کاربرد آنها را در مسائل مالی توضیح دهید.

۳ــ عوامل را در سریهای زمانی نام برده، برای هرکدام تعریف مناسبی بیان کنید.

۴ــ چند روش برای رسم خط روند می‌شناسید؟ آنها را نام برده، نحوهٔ رسم هر کدام را به‌طور کلّی توضیح دهید.

۵ــ در جدول زیر، فروش یک فروشگاه را در ۱۲ ماه از یک سال مشاهده می‌کنید. نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کرده، خطّ روند را روی نمودار از طریقهٔ دست‌آزاد برازنده کنید.

ماهها	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
y_i = فروش	۸	۱۰	۲۰	۶	۴	۸	۱۲	۱۸	۳۰	۲۵	۳۵	۲۸

۶ ــ مقدار تولید یک کارخانه را در فصول مختلف چهار سال متوالی در اختیار دارید. مطلوب است : اوّلاً، رسم نمودار حرکات فصلی. ثانیاً، رسم خطّ روند دراز مدّت با استفاده از روش میانگینهای متحرّک چهار فصلی.

سالها → / فصول ↓	۱۳۸۳	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶
بهار	۱۰	۱۲	۱۹	۲۲
تابستان	۱۴	۱۶	۲۱	۲۵
پاییز	۱۲	۱۴	۱۸	۲۰
زمستان	۸	۱۰	۱۲	۱۶

۷ــ اگر صادرات یک کشور در ده سال متوالی، به‌صورت صفحه‌بعد باشد، نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خطّ روند دراز مدّت را با کمک روشهای زیر روی نمودار حرکات سریهای زمانی برازنده کنید.

الف) طریقهٔ میانگینهای مضاعف   ب) طریقهٔ میانگینهای متحرّک سه ساله

ج) طریقهٔ کمترین مجذورات

سالها	۱۹۸۰	۱۹۸۱	۱۹۸۲	۱۹۸۳	۱۹۸۴	۱۹۸۵	۱۹۸۶	۱۹۸۷	۱۹۸۸	۱۹۸۹
صادرات	۲۰۰	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰	۲۴۰	۲۵۰	۳۰۰	۲۸۰	۳۲۰	۲۶۰

۸ ــ تعداد دانشجویان یک دانشگاه در طول پنج سال متوالی، طبق جدول زیر بوده است. خطّ روند دراز مدّت را از طریقهٔ رگرسیونی رسم کنید و تعداد دانشجو را برای سه سال متوالی بعد از سال ۱۳۷۲ پیش‌بینی کنید.

سالها	۱۳۸۲	۱۳۸۳	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶
تعداد دانشجو	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۱۶۰۰	۲۰۰۰	۲۲۰۰

۹ــ در جدول تمرین ۸ خطّ روند را از طریقهٔ میانگینهای متحرّک سه ساله، روی نمودار حرکات سریهای زمانی برازنده کنید.

۱۰ــ تعداد مشتریهای یک بانک را در ساعات مختلف پنج روزکاری، در جدول زیر در اختیار دارید. نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خطّ روند را از طریقهٔ میانگینهای متحرّک روی نمودار حرکات سری زمانی برازنده کنید.

روزها / ساعت	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
۸	۲۰	۱۵	۱۲	۱۴	۱۸
۱۰	۱۴	۱۲	۱۰	۱۲	۲۰
۱۲	۱۰	۸	۶	۸	۸
۱۴	۶	۴	۴	۵	۱۰

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ــ در معادله کمترین مربّعات $y = ax + b$ مقدار a برابر است با :

۱) $\frac{.\ xy}{.\ x^{۲}}$ ۲) $\frac{.\ x^{۲}}{.\ xy}$ ۳) $\frac{.\ x}{.\ xy}$ ۴) $\frac{.\ xy}{.\ x}$

۲ــ اگر تعداد سالهای مورد بررسی در سریهای زمانی ۹ باشد، در تعیین مقادیر x_i برای سال چهارم چه عددی را در نظر می‌گیرید تا x_i . مساوی صفر شود؟

۱) ۱ــ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) صفر

۳ــ کدام روش برای رسم خطّ روند، دقیقتر از سایر روشها است؟

۱) دست‌آزاد ۲) میانگینهای مضاعف

۳) میانگینهای متحرّک ۴) کمترین مربّعات

۴ــ کدام عامل از عوامل سریهای زمانی، غالباً قابل پیش‌بینی نیست؟

۱) تغییرات فصلی ۲) تغییرات ناگهانی ۳) تغییرات دوره‌ای ۴) تغییرات دراز مدّت

۵ ــ برای اینکه در تعیین ضرایب a و b در معادلهٔ خطّ رگرسیون، $x_i = ۰$. بشود، مقدار x را برای کدام سال صفر در نظر می‌گیرید؟ اگر تعداد سالها فرد باشد :

۱) سال اوّل ۲) سال آخر

۳) سال وسطی ۴) میانگین دو سال وسطی

۶ــ در تبدیل معادلهٔ رگرسیون به معادلهٔ کمترین مربّعات برای پیش‌بینی، مقدار b را در معادلهٔ «$y. = ax + b$» از کدام رابطه معلوم خواهید کرد؟

۱) $b = \bar{y}$ ۲) $b = \bar{y} - a\bar{x}$ ۳) $b = a\bar{x}$ ۴) $b = \bar{x}$

۷ ــ مقادیر تعدیل شده (y_i) در روش میانگینهای متحرّک نسبت به مقادیر اوّلیه سری زمانی $(y_i =)$:

۱) از نوسانات بیشتری برخوردار است. ۲) از نوسانات کمتری برخوردار است

۳)تفاوتی ندارد. ۴) گاهی نوسانات، کمتر و گاهی بیشتر است.

۸ــ در جدول صفحه بعد اوّلین و دومین میانگینهای متحرّک سه ساله کدامند؟

۱) ۱۰و۱۸ ۲)۱۲و۱۴ ۳)۱۲و ۱۵ ۴)۱۰و۱۴

سالها	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲
y_i	۱۰	۱۵	۵	۲۲	۱۸	۱۴	۱۹	۱۰

۹ــ استفاده از بررسی سریهای زمانی به منظور :

۱) شناخت گذشته است.　　　۲)پیش‌بینی آینده است.

۳) بررسی وضعیّت حال است.　　　۴) هر سه مورد درست هستند.

۱۰ــ تغییرات ناگهانی ناشی از کدام عامل زیر هستند؟

۱) عامل انسان　　　۲) عامل طبیعت

۳) هم عامل انسان و هم عامل طبیعت　　　۴) نه عامل انسان و نه عامل طبیعت

«با مقایسهٔ نسبی، می‌توان ارزش واقعی هر عدد را درک کرد.»

فصل پنجم

اعداد شاخص

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ مفهوم و تعریف عدد شاخص را بیان کند.

۲ــکاربرد اعداد شاخص را در زمینه‌های بازرگانی، مالی و اقتصادی توضیح دهد.

۳ــ فواید محاسبهٔ اعداد شاخص را برشمارد.

۴ــ انواع شاخصها را نام ببرد.

۵ــ شرایط یک شاخص خوب را بیان کند.

۶ــروشهای :درصد ساده مجموع، موزون مجموع و میانگین ساده نسبتها را در محاسبهٔ اعداد شاخص به‌کار بگیرد.

۷ــ منحنی تغییرات اعداد شاخص را رسم کند.

۸ــ چگونگی تغییر دورهٔ پایه را توضیح دهد.

۹ــ روشهای محاسبه اعداد شاخص را ارزیابی کند.

مفهوم کلی و تعریف اعداد شاخص[1]

واژهٔ «شاخص» به معنای وسیلهٔ تشخیص است و **عدد شاخص عددی است که به‌وسیله آن**

۱ ــ Indexes

تغییرات ایجاد شده در یک پدیده را در فاصله دو زمان مختلف (یا دو مکان مختلف) تشخیص می‌دهیم. بنابراین می‌توان گفت که **شاخص عددی است که برای اندازه‌گیری و سنجش تغییرات عوامل مختلف در فواصل زمانی (یا در فواصل مکانی) به‌کار برده می‌شود.** معمولاً اعداد شاخص به‌صورت درصد بیان می‌شوند. و به بیان کوتاه، می‌توان گفت که : عدد شاخص نسبت دو عدد یا دو گروه از اعداد است که به‌صورت درصد بیان می‌شود. به‌عنوان مثال وقتی می‌شنویم که شاخص قیمتها در سال ۱۳۷۲ نسبت به سال ۱۳۷۰ مساوی ۱۲۰ شده است، درخواهیم یافت که قیمت یک کالا یا یک خدمت مصرفی که در سال ۷۰ مساوی ۱۰۰ ریال بوده است، در سال ۷۲ قیمت همان کالا یا خدمت برابر ۱۲۰ ریال شده است. (یعنی ۲۰٪ رشد داشته است.)

کاربرد شاخصها در مسائل اقتصادی و بازرگانی

با محاسبهٔ اعداد شاخص بسادگی می‌توان هزینه‌های زندگی، میزان تولید محصولات کشاورزی یا صنعتی، مقدار صادرات و واردات، مرگ و میر، حقوق و دستمزد، بیکاری یا اشتغال، قیمت کالاها و خدمات مصرفی و سایر پدیده‌های اقتصادی را در دو زمان مختلف (یا در دو مکان متفاوت) با همدیگر مقایسه کرده، تغییرات ایجاد شده را بررسی کرد. در این کتاب فقط شاخصهای زمانی (یعنی شاخصهایی که بیان‌کنندهٔ تغییرات ایجاد شده در پدیده‌های مختلف در طول زمان هستند.) را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. ضمناً موضوع شاخصها را بیشتر در ارتباط با زمینه‌هایی نظیر قیمتها، مقادیر و ارزشها که جنبهٔ اقتصادی دارند، مطرح خواهیم کرد.

فواید محاسبهٔ اعداد شاخص

به‌طور کلّی می‌توان فواید زیر را برای اعداد شاخص برشمرد :

ــ بررسی تغییرات احتمالی در زمانهای آینده.

ــ بررسی تغییرات یک یا چند پدیده در دو زمان مختلف.

ــ بررسی تغییرات یک یا چند پدیده در دو مکان مختلف.

ــ شناخت ارزش واقعی اعداد و ارقام.

ــ محرمانه نگهداشتن اطّلاعات اقتصادی یا سیاسی از رقبا.

ــ بیان کلّی اطّلاعات و کنار گذاشتن جزییّات امر.

ــ استفاده از اعداد شاخص در تجزیه و تحلیلهای آماری نظیر شاخصهای مرکزی و انحرافات (پراکندگیها) و رسم نمودارهای آماری در فعالیّت سازمانها و...

بدین ترتیب، آگاهی از اعداد شاخص به ما توانایی می‌دهد که :

ــوضعیّت مالی مؤسسات مختلف را با همدیگر مقایسه کنیم.

ــتغییرات ایجاد شده در قیمت یا مقدار کالاها یا خدمات را در دو زمان مختلف بشناسیم.

ــتغییرات ایجاد شده در قیمت یا مقدار کالاها یا خدمات را در دو مکان مختلف بشناسیم.

ــارزش واقعی حقوق و دستمزدها را در رابطه با تغییرات قیمتها، درک کنیم.

ــتغییرات ایجاد شده در مسائلی مانند اشتغال، بیکاری، بهداشت، کشاورزی، آموزش و پرورش، هنر و... را بررسی کنیم.

در اینجا به عنوان نمونه کاربرد اعداد شاخص را در تعیین قدرت خرید پول مطرح می‌کنیم :

قدرت خرید پول ــ منظور از قدرت خرید پول، ارزش پول در مبادلهٔ کالاها و خدمات می‌باشد، که رابطهٔ معکوسی با سطح قیمتها خواهد داشت. یعنی هرچه سطح قیمتها افزایش می‌یابد، قدرت خرید پول کاهش خواهد یافت.

بنابراین، اگر سطح قیمتها دو برابر شود، قدرت خرید پول نصف خواهد شد.

برای تعیین قدرت خرید پول می‌توانید از رابطهٔ زیر استفاده کنید :

(فرمول ۱)

$$\boxed{\text{قدرت خرید پول} = \frac{۱}{\text{شاخص قیمتها}} \times ۱۰۰}$$

مثال ۱ــ اگر شاخص قیمت کالاها و خدمات مصرفی در سال ۱۳۷۲ نسبت به سال ۱۳۷۰ مساوی ۲۵۰ شده باشد، قدرت خرید پول در سال ۱۳۷۲ نسبت به سال ۱۳۷۰ به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد :

$$\frac{۱}{۲۵۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۲۵۰} = ۰/۴$$

مفهوم عدد ۰/۴ این است که قدرت خرید هر تومان در سال ۱۳۷۲ مساوی قدرت خرید ۴ ریال

در سال ۱۳۷۰ شده است، یعنی همان کالایی را که در سال ۱۳۷۰ می‌توانسته‌ایم با ۴ ریال بخریم، در سال ۱۳۷۲ باید با ۱۰ ریال خریداری کنیم.

حقوق و دستمزد واقعی

حقوق یا دستمزدی که کارکنان یک مؤسسه (بخش دولتی یا بخش خصوصی) دریافت می‌کنند یک مبلغ اسمی است که باید قدرت خرید واقعی آن را در زمانهای مختلف معلوم کرد. برای تعیین حقوق و دستمزد واقعی کارمندان یا کارگران یک سازمان باید حقوق و دستمزد اسمی آنها را (حقوق یا دستمزدی که در حال حاضر دریافت می‌کنند.) در قدرت خرید پول، که در بالا توضیح داده شد، ضرب کنیم. برای مثال اگر شاخص قیمتها در سال ۱۳۸۶ نسبت به سال ۱۳۸۰ مساوی ۲۴۰ شده باشد وفردی به نام X در سال ۱۳۸۶ حقوق یا دستمزدی معادل ۴۰۰ هزار تومان دریافت کند، حقوق و دستمزد واقعی او در سال ۸۶ از رابطه زیر به دست خواهد آمد :

$$۴۸۰۰۰۰ \times \frac{۱۰۰}{۲۴۰} = ۲۰۰۰۰۰$$

در واقع حقوق واقعی آقای X در سال ۱۳۸۶ نسبت به سال ۱۳۸۰ معادل ۲۰۰ هزار تومان است.

$$\text{حقوق و دستمزد واقعی} = \text{حقوق و دستمزد اسمی} \times \frac{۱۰۰}{\text{شاخص قیمتها}}$$

انواع شاخصهای اقتصادی

کارشناسان مختلف، شاخصها را به شکلهای متنوّعی (باتوجّه به دیدگاههای متفاوت) دسته‌بندی می‌کنند. برای مثال می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

انواع شاخصها از نظر موضوع مورد بررسی

شاخصهای اقتصادی، مانند شاخص هزینه‌های زندگی

شاخصهای اجتماعی، مانند شاخص مرگ و میر

انواع شاخصها از نظر اجزای مورد بررسی در عدد شاخص

شاخصهای ساده (بدون ضریب)

شاخصهای موزون (وزن دار = ضریب دار)

انواع شاخصها از نظر هدف مورد بررسی

شاخصهای اطّلاع‌دهنده

شاخصهای پیش‌بینی‌کننده

شاخصهای شناخت مشکلات و حل آنها

شاخصهای ارزیابی‌کنندهٔ برنامه‌ها و کنترل آنها

انواع شاخصها از نظر روش محاسبه

شاخص درصد ساده مجموع (غیر وزنی)

شاخص موزون مجموع (وزنی)

شاخص میانگین نسبتها (نسبتی) و ...

در این کتاب، دسته‌بندی اخیر (دسته‌بندی ۴ــ۴) مورد مطالعهٔ دقیق قرار خواهد گرفت.

شرایط یک شاخص خوب

برای اینکه بتوان به یک عدد شاخص اعتماد کرد، باید شرایط زیر را داشته باشد :

حتّی‌الامکان بیشترین اطّلاعات را دربر داشته باشد. مثلاً اگر شاخص قیمتها را محاسبه می‌کنیم، باید نمونه‌ای نسبتاً بزرگ و جامع از انواع کالاها و خدمات را در اکثر نقاط کشور مورد بررسی قرار داده باشیم. نمی‌توان با داشتن قیمت چند قلم محدود از کالاها و خدمات، در چند نقطه محدود، شاخص قیمتها را برای یک مملکت محاسبه کرد.

زمان پایهٔ آنها، مناسب انتخاب شده باشد. مقصود از زمان پایه، زمانی است که سایر زمانها را نسبت به آن می‌سنجیم. این زمان باید حتّی‌المقدور از شرایط عادّی و متعالی برخوردار باشد. این

درست نیست که مثلاً قیمتها را در زمان صلح نسبت به زمان جنگ مقایسه کنیم. همچنین زمان پایه، نباید نسبت به زمان انجام بررسی، خیلی نزدیک یا خیلی دور باشد. برای مثال، مقایسه قیمتهای سال ۱۳۷۳ نسبت به سال ۱۳۵۳ نتایج گمراه‌کننده‌ای به دنبال خواهد داشت.

ضرایب لازم در محاسبهٔ اعداد شاخص به‌کار گرفته شده باشند. برای مثال اگر شاخص قیمتها را در سالهای مختلف نسبت به سال مشخّصی به نام سال پایه محاسبه می‌کنیم، از ضرایب مقدار و عرضه کالاها یا خدمات مذکور نیز استفاده لازم را کرده باشیم. زیرا می‌دانیم که همواره کم و زیاد شدن عرضهٔ کالا در قیمت آن تأثیر خواهد داشت.

هدف اصلی محاسبهٔ عدد شاخص، مشخّص باشد تا استفاده‌کنندگان از شاخص گمراه نشوند. فرضاً اگر بخواهیم در مورد اشتغال در کلّ جامعه قضاوت کنیم، نمی‌توانیم از شاخص پرداخت حقوق و دستمزد در بخش معیّنی از اقتصاد استفاده کنیم.

روشهای محاسبهٔ اعداد شاخص

تذکّر: به منظور سهولت بخشیدن در طرح روشهای محاسبهٔ اعداد شاخص، در این کتاب بیشتر شاخص قیمتها مورد بررسی قرار گرفته است. شما می‌توانید با تغییر نمادهای لازم، این روشها را در هر زمینه‌ای که لازم باشد، به‌کار ببرید. ضمناً حرف «P» از واژه Price به عنوان نماد قیمت به‌کار رفته است و $P_{\circ n}$ را به‌عنوان شاخص قیمتها در سال nاُم نسبت به سال پایه، مورد استفاده قرار داده‌ایم.

روش درصد ساده مجموع

در این روش، مجموع داده‌های آماری مربوط به یک متغیّر «مثلاً قیمت» را در هر سال (یا هر زمان مورد نظر دیگر) بر مجموع داده‌های آماری مربوط به همان متغیّر در سال پایه، تقسیم کرده، در عدد صد ضرب می‌کنیم. مثلاً برای شاخص قیمتها خواهیم داشت:

$$\boxed{P_{\circ n} = \frac{\sum P_n}{\sum P_\circ} \times ۱۰۰}$$ (فرمول ۲)

علّت ضرب کردن اعداد شاخص در عدد صد، این است که به این ترتیب درک تغییرات ساده‌تر

خواهد شد. هرگاه عدد شاخص از عدد صد بزرگتر باشد، در متغیّر مورد بررسی، به اندازهٔ اختلاف عدد شاخص با عدد صد، افزایش حاصل شده و هرگاه عدد شاخص از عدد صد کوچکتر باشد، به‌اندازهٔ اختلاف عدد شاخص با عدد صد، در متغیّر مورد مطالعه، کاهش ایجاد شده است. برای مثال اگر شاخص قیمتها در سالهای ۷۲ و ۷۳ نسبت به سال ۷۰ بترتیب ۱۲۰ و ۹۰ شده باشد، می‌توان قضاوت کرد که قیمتها در سال ۷۲ نسبت به سال ۷۰ به اندازه ۲۰٪ افزایش و در سال ۷۳ نسبت به سال ۷۰ به اندازه ۱۰٪ کاهش را نشان می‌دهند.

مثال ۲ــ اگر قیمت پنج نوع کالای مختلف در چهار سال متوالی طبق جدول زیر بوده باشد، شاخص قیمتها را برای سالهای ۷۰، ۷۱ و ۷۲ نسبت به سال ۶۹، که سال پایه است، از طریقهٔ درصد ساده مجموع محاسبه کنید :

جدول۱

سالها / کالاها	۱۳۶۹	۱۳۷۰	۱۳۷۱	۱۳۷۲
کالای الف	۲۰	۲۸	۱۵	۳۰
کالای ب	۱۰	۱۲	۸	۱۵
کالای ج	۵۰	۵۷	۴۵	۶۰
کالای د	۶۵	۶۸	۶۰	۷۰
کالای هـ	۵۵	۶۰	۵۲	۶۵
	. P_0 = ۲۰۰	. P_1 = ۲۲۵	. P_2 = ۱۸۰	. P_3 = ۲۴۰

تذکّر: برای حلّ یک مسأله شاخص، ابتدا به سؤالات زیر پاسخ داده، سپس به حلّ مسأله بپردازید :

اوّل ــ چه نوع شاخصی محاسبه می‌شود؟ (در این مثال شاخص قیمتها محاسبه می‌شود.)

دوم ــ از چه روش محاسبه می‌شود؟ (در این مثال از روش درصد ساده مجموع محاسبه می‌شود.)

سوم ــ برای چه سالهایی و نسبت به چه سالی محاسبه می‌شود؟ (در این مثال برای سالهای ۷۰، ۷۱ و ۷۲ نسبت به سال ۶۹ محاسبه می‌شود.)

حلّ:

$$P_{\circ ۱} = \frac{P_{۱}}{P_{\circ}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۲۵}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۱۲/۵$$

(شاخص قیمتها در سال ۷۰ نسبت به سال ۶۹)

$$P_{\circ ۲} = \frac{P_{۲}}{P_{\circ}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۸۰}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۹۰$$

(شاخص قیمتها در سال ۷۱ نسبت به سال ۶۹)

$$P_{\circ ۳} = \frac{P_{۳}}{P_{\circ}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۴۰}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۲۰$$

(شاخص قیمتها در سال ۷۲ نسبت به سال ۶۹)

تذکّر: اگر عدد شاخص را برای سال پایه محاسبه کنیم، حتماً عدد ۱۰۰ حاصل می‌شود.

روش موزون مجموع

در این روش، بجز داده‌های آماری از ضرایب با اهمیّت هر یک از اعداد نیز، استفاده می‌شود. به این ترتیب که ابتدا هر یک از اعداد را در ضرایب مربوط ضرب می‌کنیم. آنگاه، مطابق روش درصد سادهٔ مجموع به محاسبهٔ اعداد شاخص می‌پردازیم. در محاسبهٔ شاخص قیمتها غالباً از مقادیر سال پایه و در محاسبه شاخص مقادیر از قیمتهای سال پایه به‌عنوان ضرایب با اهمیّت استفاده می‌کنند. مثلاً شاخص قیمتها را در این روش به صورت زیر محاسبه می‌کنند:

$$\boxed{P_{\circ n} = \frac{P_{n}Q_{\circ}}{P_{\circ}Q_{\circ}} \times ۱۰۰} \qquad \text{(فرمول ۳)}$$

حرف Q در فرمول ۳ از واژه «Quantity» به معنای «مقدار» گرفته شده است.

فرمول ۳ را فرمول لاسپیرز «Laspeyres[1]» نیز می‌نامند.

توجّه دارید که در این روش، علاوه بر مقادیر متغیّر مورد بررسی «مثلاً قیمتها» باید مقادیر ضریب با اهمیّت مربوط «مثلاً مقادیر سال پایه» را نیز در اختیار داشت. (به همین دلیل به این گونه شاخص‌ها، شاخص مرکب گفته می‌شود.)

مثال ۳ــ در جدول زیر، شاخص قیمتها را برای سالهای ۷۱ و ۷۲ نسبت به سال ۷۰ که سال پایه است، از روش موزون مجموع «لاسپیرز» محاسبه کنید.

۱ــ لاسپیرز نام یک دانشمند آلمانی است که اولّین بار این روش را پیشنهاد کرده است.

جدول ۲

نوع محصولات	۱۳۷۰		۱۳۷۱	۱۳۷۲
	Q_0	P_0	P_1	P_2
A	۲۰۰	۱۰	۱۵	۸
B	۵۰۰	۲	۳	۲
C	۴۰۰	۲۰	۳۰	۲۰
D	۱۰۰	۹۰	۹۰	۸۰

حلّ:

جدول ۳

نوع محصولات	۱۳۷۰		۱۳۷۱	۱۳۷۲	۱۳۷۰	۷۱ و ۷۰	۷۲ و ۷۰
	Q_0	P_0	P_1	P_2	P_0Q_0	P_1Q_0	P_2Q_0
A	۲۰۰	۱۰	۱۵	۸	۲۰۰۰	۳۰۰۰	۱۶۰۰
B	۵۰۰	۲	۳	۲	۱۰۰۰	۱۵۰۰	۱۰۰۰
C	۴۰۰	۲۰	۳۰	۲۰	۸۰۰۰	۱۲۰۰۰	۸۰۰۰
D	۱۰۰	۹۰	۹۰	۸۰	۹۰۰۰	۹۰۰۰	۸۰۰۰
					. P_0Q_0 = ۲۰۰۰۰	. P_1Q_0 = ۲۵۵۰۰	. P_2Q_0 = ۱۸۶۰۰

$$P_{01} = \frac{\cdot\ P_1Q_0}{\cdot\ P_0Q_0} \times ۱۰۰ = \frac{۲۵۵۰۰}{۲۰۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۲۷/۵$$ (شاخص قیمتهای سال ۷۱)

$$P_{02} = \frac{\cdot\ P_2Q_0}{\cdot\ P_0Q_0} \times ۱۰۰ = \frac{۱۸۶۰۰}{۲۰۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۹۳$$ (شاخص قیمتهای سال ۷۲)

تذکّر ۱ : توجّه داشته باشید که فرمول لاسپیرز برای شاخص مقادیر، به‌صورت صفحهٔ بعد نوشته خواهد شد :

$$Q_{0n} = \frac{\sum Q_n P_0}{\sum Q_0 P_0} \times ۱۰۰$$ (فرمول ۴)

که مقصود از نماد Q_{0n}، شاخص مقدار در سال nاُم نسبت به سال پایه و منظور از علامت P_0، قیمت در سال پایه می‌باشد.

تذکّر ۲ : دانشمند دیگری به نام پاشه (Paasche)، که او هم آلمانی است، به‌جای مقادیر سال پایه در شاخص قیمتها، از مقادیر هر سال به عنوان ضریب با اهمیّت استفاده می‌کند (و در شاخص مقدار از قیمتهای هر سال به عنوان ضریب با اهمیّت یاد می‌کند.) و به این ترتیب، فرمولهای پاشه، در روش موزون مجموع برای شاخص قیمتها و شاخص مقادیر به‌صورت زیر خواهند بود :

$$Q_{0n} = \frac{\sum Q_n P_n}{\sum Q_0 P_n} \times ۱۰۰$$ (فرمول ۶)

$$P_{0n} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_0 Q_n} \times ۱۰۰$$ (فرمول ۵)

مثال ۴ــ در جدول زیر شاخص قیمتها برای سال ۱۳۸۰ نسبت به سال ۱۳۷۹ از دو روش لاسپیرز و پاشه محاسبه شده است. (طریقه پاشه را طریقه موزون مجموع برای سال مورد نظر، نیز می‌نامند.)

جدول ۴

کالاها	۱۳۷۹		۱۳۸۰		۸۰ و ۷۹	۸۰	۷۹	۸۰ و ۷۹
	Q_0	P_0	Q_1	p_1	P_0Q_1	P_1Q_1	P_0Q_0	P_1Q_0
A	۱۰۰	۵۰	۱۲۰	۶۰	۶۰۰۰	۷۲۰۰	۵۰۰۰	۶۰۰۰
B	۲۰۰	۴۰	۲۵۰	۵۰	۱۰۰۰۰	۱۲۵۰۰	۸۰۰۰	۱۰۰۰۰
C	۵۰	۲۰	۶۰	۲۴	۱۲۰۰	۱۴۴۰	۱۰۰۰	۱۲۰۰
D	۲۰	۱۰	۲۵	۱۲	۲۵۰	۳۰۰	۲۰۰	۲۴۰
					$\sum P_0Q_1 =$ ۱۷۴۵۰	$\sum P_1Q_1 =$ ۲۱۴۴۰	$\sum P_0Q_0 =$ ۱۴۲۰۰	$\sum P_1Q_0 =$ ۱۷۴۴۰

$$P_{۰۱} = \frac{\cdot\ P_۱Q_۱}{\cdot\ P_۰Q_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۲۱۴۴۰}{۱۷۴۵۰} \times ۱۰۰ = ۱۲۲/۸۶$$

شاخص قیمتها از طریقهٔ پاشه

$$P_{۰۱} = \frac{\cdot\ P_۱Q_۰}{\cdot\ P_۰Q_۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۷۴۴۰}{۱۴۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۲۲/۸۱$$

شاخص قیمتها از طریقهٔ لاسپیرز

روش میانگین نسبتها

در این روش، همانگونه که از اسم آن معلوم است، ابتدا نسبت هر یک از داده‌های آماری را به مقدار متناظر آن در سال پایه محاسبه کرده، سپس میانگین نسبتهای به‌دست آمده را به‌عنوان شاخص درنظر می‌گیریم. بهتر است ابتدا نسبتها را در عدد صد ضرب کرده، آنگاه میانگین نسبتها را محاسبه کنیم. با این توضیح، فرمول شاخص قیمتها طبق روش میانگین نسبتها به‌صورت ۷ خواهد بود :

$$\boxed{P_{۰n} = \frac{\cdot \left(\frac{P_n}{P_۰} \times ۱۰۰\right)}{n}}$$ (فرمول ۷)

در فرمول ۷، n تعداد نمونه کالاها یا خدماتی است که شاخص قیمتها برای آنها محاسبه می‌شود.

تذکّر: در فرمول ۷ اگر به‌جای حرف P (برای قیمت) از حرف Q (برای مقدار) استفاده کنیم، فرمول شاخص مقدار حاصل خواهد شد.

مثال ۵ــ در جدول صفحه بعد شاخص قیمتها را برای سالهای ۷۹ و ۸۰ نسبت به سال ۱۳۷۸ از طریقهٔ میانگین سادهٔ نسبتها محاسبه کرده‌ایم.

$$P_{۰۱} = \frac{\cdot \left(\frac{P_۱}{P_۰} \times ۱۰۰\right)}{n} = \frac{۳۶۰}{۳} = ۱۲۰$$ (شاخص قیمتها در سال ۷۹)

$$P_{۰۲} = \frac{\cdot \left(\frac{P_۲}{P_۰} \times ۱۰۰\right)}{n} = \frac{۲۴۷/۵}{۳} = ۸۲/۵$$ (شاخص قیمتها در سال ۸۰)

جدول ۵

محصولات	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۷۹ و ۷۸	۸۰ و ۷۸
	P_0	P_1	P_2	$\frac{P_1}{P_0}\times ۱۰۰$	$\frac{P_2}{P_0}\times ۱۰۰$
الف	۲۰۰	۲۸۰	۱۶۰	$\frac{۲۸۰}{۲۰۰}\times ۱۰۰ = ۱۴۰$	$\frac{۱۶۰}{۲۰۰}\times ۱۰۰ = ۸۰$
ب	۴۰۰	۴۴۰	۳۵۰	$\frac{۴۴۰}{۴۰۰}\times ۱۰۰ = ۱۱۰$	$\frac{۳۵۰}{۴۰۰}\times ۱۰۰ = ۸۷/۵$
ج	۵۰	۵۵	۴۰	$\frac{۵۵}{۵۰}\times ۱۰۰ = ۱۱۰$	$\frac{۴۰}{۵۰}\times ۱۰۰ = ۸۰$
				$.\ (\frac{P_1}{P_0}\times ۱۰۰) = ۳۶۰$	$.\ (\frac{P_2}{P_0}\times ۱۰۰) = ۲۴۷/۵$

تذکّر ۱: اگر شاخصها را در روش میانگین نسبتها به صورت ضریب‌دار حل کنیم، مثلاً طبق روش پیشنهادی لاسپیرز از مقادیر سال پایه به‌عنوان ضریب، در شاخص قیمتها استفاده کنیم، نتیجه عیناً مساوی طریقهٔ موزون مجموع خواهد شد ؛ زیرا با اندکی دقّت در فرمولهای زیر درمی‌یابیم که این دو فرمول هم‌ارز هستند. (= یکسان هستند.)[1]

$$P_{0n} = \frac{.\ P_n Q_0}{.\ P_0 Q_0}\times ۱۰۰$$ (فرمول ۳ تکراری)

شاخص قیمتها از طریقه لاسپیرز

$$P_{0n} = \frac{.\ (\frac{P_n}{P_0}\times ۱۰۰ \times P_0 Q_0)}{.\ P_0 Q_0}$$ (فرمول ۸)

شاخص قیمتها از طریقهٔ میانگین موزون نسبتها

امّا اگر اطّلاعات آماری به‌صورت نسبت در اختیار ما باشند و بخواهیم از شاخصهای ضریب‌دار و موزون استفاده کنیم، طبیعی است که از فرمول مربوط به روش میانگین موزون نسبتها، استفاده

۱ــ در فرمول ۸ اگر در صورت کسر P_0 ها را با هم ساده کنید، فرمول ۳ حاصل خواهد شد.

خواهیم کرد.

تذکّر ۲: اگر در هر یک از روشهای عنوان شده، واژه «زنجیره‌ای» در دنبالهٔ اسم روش اضافه شود، مقصود این است که هر سال را نسبت به سال قبل از آن مقایسه کنید. یعنی در روش زنجیره‌ای سال قبل همان سال پایه محسوب می‌شود.

تذکّر ۳: بجز روشهای عنوان شده در این کتاب، روشهای دیگری نیز برای محاسبهٔ اعداد شاخص وجود دارد که خارج از برنامهٔ درسی است. بنابراین از ذکر آنها خودداری می‌کنیم. (برای مطالعه بیشتر می‌توانید به منابع آخر کتاب مراجعه کنید.)

منحنی تغییرات اعداد شاخص

به منظور مقایسهٔ اعداد شاخص، می‌توان از نمایش هندسی اعداد شاخص (نمودار) استفاده کرد. برای این مقصود، کافی است، روی محور ox، سالهای مختلف و روی محور oy، اعداد شاخص مربوط به آن سالها را قرار داده، برای هر سال متناسب با عدد شاخص نقطه‌ای به‌دست آوریم. از اتّصال نقاط حاصل، منحنی تغییرات اعداد شاخص به دست خواهد آمد.

مثال ۶ـــ در جدول زیر، قیمت چهار نوع محصول را در پنج سال متوالی مشاهده می‌کنید. اوّلاً، شاخص قیمتها را برای سالهای ۷۷، ۷۸، ۷۹ و ۸۰ از طریقهٔ درصد سادهٔ مجموع نسبت به سال ۷۶ محاسبه کنید. ثانیاً، نمودار تغییرات اعداد شاخص را روی محورهای مختصّات نشان دهید.

جدول ۶

کالاها	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰
الف	۱۰۰	۱۲۰	۸۰	۲۰۰	۷۰
ب	۱۲۰	۱۳۰	۱۰۰	۱۸۰	۹۰
ج	۸۰	۱۰۰	۶۰	۱۲۰	۵۰
د	۲۰۰	۲۵۰	۱۶۰	۲۸۰	۱۳۰
مجموع	۵۰۰	۶۰۰	۴۰۰	۷۸۰	۳۴۰

فرمول کلّی شاخص قیمتها از طریقهٔ درصد سادهٔ مجموع $P_{0n} = \frac{P_n}{P_0} \times 100$

$$P_{01} = \frac{P_1}{P_0} \times 100 = \frac{600}{500} \times 100 = 120$$

(شاخص قیمت در سال ۷۷ نسبت به سال ۷۶)

$$P_{02} = \frac{P_2}{P_0} \times 100 = \frac{400}{500} \times 100 = 80$$

(شاخص قیمت در سال ۷۸ نسبت به سال ۷۶)

$$P_{03} = \frac{P_3}{P_0} \times 100 = \frac{780}{500} \times 100 = 156$$

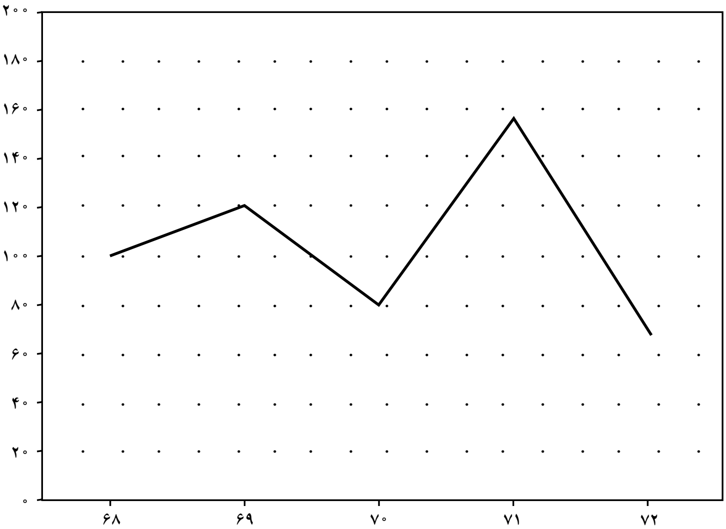
(شاخص قیمت در سال ۷۹ نسبت به سال ۷۶)

$$P_{04} = \frac{P_4}{P_0} \times 100 = \frac{340}{500} \times 100 = 68$$

(شاخص قیمت در سال ۸۰ نسبت به سال ۷۶)

$$P_{00} = \frac{P_0}{P_0} \times 100 = \frac{500}{500} \times 100 = 100$$

(شاخص سال ۷۶ نسبت به سال ۷۶)



نمودار۱

تذکّر: عدد شاخص در همه روشها برای سال پایه، مساوی صد خواهد بود به این معنا که سال پایه نسبت به خودش هیچ تغییری را نشان نمی‌دهد.

چگونگی تغییر دوره پایه (سال پایه)

در صفحات قبل گفتیم که سال پایه، یا به‌طور کلّی زمان و دورهٔ پایه، باید طوری انتخاب شود که نسبت به زمان محاسبه اعداد شاخص خیلی دور نباشد. در غیر این صورت، تجزیه و تحلیل و تفسیر اعداد شاخص مفهوم خود را از دست خواهد داد. بنابراین با گذشت زمان، عملاً باید سال پایه «یا دورهٔ پایه» را تغییر داد و آن را جلوتر کشید. به این عمل اصطلاحاً «تغییر دورهٔ پایه» گفته می‌شود. با تغییر دورهٔ پایه، اعداد شاخص محاسبه شده قبلی نیز تغییر خواهند کرد. در عمل برای تعیین اعداد شاخص جدید، بعد از تغییر دورهٔ پایه، دو شیوه مرسوم است.

تمام محاسبات اعداد شاخص را مجدّداً از اوّل انجام دهیم.

تمام اعداد شاخص قبلی را به شاخص دوره‌ای که می‌خواهد دوره پایه محسوب شود، تقسیم کنیم.

روش دومی روش ساده‌تری است و هزینه کمتری را نیز به همراه خواهد داشت. و به این ترتیب، شاخص سال پایه، خود بخود مساوی ۱۰۰ خواهد شد.

مثال ۷ــ فرض کنید قبلاً اعداد شاخص قیمتها را برای سالهای ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱ و ۷۲ نسبت به سال ۶۷ (که سال پایه بوده است.) محاسبه کرده‌ایم و اعداد ۱۲۰٪، ۱۱۰٪، ۹۰٪، ۹۵٪ و ۱۴۰٪ حاصل شده‌اند. اگر بخواهیم سال ۷۰ را سال پایهٔ جدید در نظر بگیریم، شاخصهای جدید قیمتها را محاسبه کنید.

حل: چون در این مثال، اطّلاعات و اعداد مربوط به محاسبهٔ شاخصها را در اختیار نداریم، بنابراین از روش ۸ــ۲ استفاده می‌کنیم و برای این مقصود، هر یک از اعداد شاخص را بر ۹۰، که شاخص قبلی ۱۳۷۰ می‌باشد، تقسیم خواهیم کرد :

شاخص جدید سال ۶۸ نسبت به سال ۷۰ $\longrightarrow$ $\frac{۱۲۰}{۹۰}\times ۱۰۰ = ۱۳۳/۳$

شاخص جدید سال ۶۹ نسبت به سال ۷۰ $\longrightarrow$ $\frac{۱۱۰}{۹۰}\times ۱۰۰ = ۱۲۲/۲$

شاخص سال پایه ⟵ $\frac{۹۰}{۹۰}\times ۱۰۰=۱۰۰$

شاخص جدید سال ۷۱ نسبت به سال ۷۰ ⟵ $\frac{۹۵}{۹۰}\times ۱۰۰=۱۰۵/۵$

شاخص جدید سال ۷۲ نسبت به سال ۷۰ ⟵ $\frac{۱۴۰}{۹۰}\times ۱۰۰=۱۵۵/۵$

ارزیابی روشهای محاسبهٔ اعداد شاخص

در ارزیابی روشهای مختلف محاسبهٔ اعداد شاخص، نکات زیر قابل توجّه است :

ـ هرگاه اطّلاعات آماری، محدود به اندازه‌های یک متغیّر آماری «مثلاً قیمت» در چند سال مختلف باشد، روش درصد سادهٔ مجموع، روش مناسبی است ؛ امّا اگر بجز اندازه‌های متغیّر مربوط، ضریب با اهمیّتی «مثلاً قیمتهای سال پایه» در محاسبهٔ شاخص مقدار یا مقادیر تولید در سال پایه برای محاسبهٔ اعداد شاخص قیمت نیز در اختیار باشد، روش موزون مجموع مناسب‌تر خواهد بود و چنانچه به‌جای اندازه‌های مطلقِ متغیّرهای مختلف، نسبت تغییرات اندازه‌ها در زمانهای مختلف در اختیار باشند، از روش میانگین نسبتها، اعداد شاخص را محاسبه خواهیم کرد.

ـ اگر همه امکانات برای استفاده کردن از روشهای مختلف در اختیار باشند، روش موزون مجموع روش مناسبتری است، مگر اینکه هدف بررسی نسبت تغییرات باشد، که در این صورت روش میانگین نسبتها را ترجیح خواهیم داد.

ـ در تفسیر یک عدد شاخص، باید همه جوانب را در نظر گرفت.

مثلاً وقتی می‌گویند، شاخص پرداخت حقوق کارمندان دولت در سال ۱۳۷۰ نسبت به سال ۱۳۶۰ مثلاً ۲۴۰٪ شده است، باید شاخص قیمت را نیز درنظر گرفت، در غیر این صورت، ممکن است تصوّر کنیم که حقوق کارمندان ۱۴۰٪ زیادتر شده است، درحالی که اگر درآمد ظاهری کارمندان را بر شاخص هزینه‌های زندگی تقسیم کنیم، درآمد واقعی آنان معلوم خواهد شد.

به‌عنوان مثال، اگر درآمد آقای x در سال ۱۳۷۰، ۱۴۰٪ درآمد او در سال ۱۳۶۰ شده باشد، (یعنی درآمد او ظاهراً ۴۰٪ افزایش یافته باشد.) و شاخص هزینه‌های زندگی در سال ۱۳۷۰ نسبت به سال ۱۳۶۰ مثلاً ۲۰۰٪ (یعنی دو برابر) شده باشد، درآمد واقعی آقای x از تقسیم عدد ۱۴۰ به ۲۰۰ ($\frac{۱۴۰}{۲۰۰}\times ۱۰۰=٪۷۰$) معلوم خواهد شد، که حتی ۳۰٪ هم کاهش نشان می‌دهد.

ــ برای درک و تفسیر بهتر اعداد شاخص، در صورت امکان اعداد شاخص را از روشهای مختلف محاسبه کرده، میانگین اعداد شاخص را به‌عنوان شاخص تعدیل شده، مورد تفسیر قرار خواهیم داد.

ــ بجز سه روش ــ درصدِ سادهٔ مجموع، موزون مجموع و میانگین سادهٔ نسبتها ــ، روشهای دیگری نیز برای محاسبهٔ اعداد شاخص وجود دارد که ضرایب با اهمیّت آنها متفاوت است. به طور نمونه، همانگونه که قبلاً گفته شد «پاشه» در طریقهٔ موزون مجموع، به‌جای ضرایب مربوط به‌سال پایه، از ضرایب سالهای جاری استفاده کرده است، به‌عنوان مثال شاخص قیمتها را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کند :

$$\boxed{P_n = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_\circ Q_n} \times ۱۰۰}$$

(فرمول ۵ تکراری)

ملاحظه می‌کنید که اگر اطّلاعات لازم در اختیار باشند، روش پاشه کاملتر از روش پیشنهادی «لاسپیرز» است. به طور کلّی هر چه اطّلاعاتِ آماری کاملتر باشند، محاسبهٔ شاخصها دقیق‌تر و معتبرتر خواهد شد.

تمرینهای فصل پنجم

۱ــ «واژهٔ شاخص» را تعریف کنید.

۲ــ «عدد شاخص» یعنی چه؟

۳ــ مفهوم کلّی اعداد شاخص را بیان کنید.

۴ــ در چه مواردی از اعداد شاخص در زمینه‌های مالی استفاده می‌کنید؟

۵ــ فواید محاسبهٔ اعداد شاخص را بیان کنید.

۶ــ یک شاخص خوب، چه شرایطی باید داشته باشد؟

۷ــ در جدول زیر، شاخص قیمتها را از طریقهٔ درصد سادهٔ مجموع و شاخص مقدار را از طریقهٔ میانگین سادهٔ نسبتها برای سالهای ۷۹ و ۸۰ نسبت به سال ۱۳۷۸ محاسبه کنید.

محصولات نمونه	۱۳۷۸		۱۳۷۹		۱۳۸۰	
	P_0	Q_0	P_1	Q_1	P_2	Q_2
الف	۱۲۰	۲۰۰	۱۴۰	۲۵۰	۱۰۰	۱۴۰
ب	۸۰	۴۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۶۰	۲۵۰
ج	۱۰۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۵۰	۹۰	۸۰
د	۵۰	۵۰۰	۷۰	۶۰۰	۴۵	۴۰۰

۸ــ در جدول مسألهٔ (۷) شاخص قیمتها و شاخص مقادیر را در سالهای ۱۳۷۹ و ۱۳۸۰ نسبت به سال ۱۳۷۸ از طریقهٔ موزون مجموعِ «لاسپیرز» محاسبه کنید.

۹ــ در جدول زیر شاخص مقادیر تولید را برای سالهای مختلف، از طریقهٔ میانگین سادهٔ نسبتهای زنجیره‌ای محاسبه کرده، نمودار منحنی تغییرات شاخصها را رسم کنید.

محصولات	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲
نمونه	مقدار	مقدار	مقدار	مقدار	مقدار
الف	۲۰	۲۵	۱۸	۳۰	۱۰
ب	۵۰	۶۵	۴۲	۶۰	۴۰
ج	۱۰	۱۵	۸	۱۵	۶
د	۱۲۰	۱۲۵	۱۲۰	۱۴۵	۷۴

۱۰ــ اگر قیمت یک کالای مصرفی در سال ۱۳۷۰، مساوی ۲۵ ریال و در سال ۱۳۸۰ مساوی۳۰ ریال شده باشد، شاخص سادهٔ قیمت این کالا را در سال ۱۳۸۰ نسبت به سال ۱۳۷۰ محاسبه کنید.

۱۱ــ در جدول زیر شاخص مقادیر را در سالهای ۱۳۸۲ و ۱۳۸۱ نسبت به سال ۱۳۸۰ از طریق پاشه محاسبه کرده، درصد تغییرات را نشان دهید.

نمونه‌ها	۱۳۸۰	۱۳۸۱		۱۳۸۲	
	مقدار	قیمت	مقدار	قیمت	مقدار
الف	۱۰	۸	۱۲	۱۵	۲۰
ب	۲۰	۱۰	۲۴	۲۰	۲۵
ج	۱۰۰	۲۰	۱۲۰	۲۰	۱۴۰
د	۵۰	۱۰	۶۰	۱۲	۸۰

۱۲ــ در جدول زیر شاخص قیمتها را در سالهای ۱۳۸۲ و ۱۳۸۱ نسبت به سال ۱۳۸۰ از طریق میانگین موزون نسبتها محاسبه نموده و درصد تغییرات را نشان دهید.

نمونه کالاها	۱۳۸۰		۱۳۸۱	۱۳۸۲
	قیمت	مقدار	قیمت	قیمت
A	۲۰	۱۰	۲۵	۱۸
B	۴۰	۵	۶۰	۳۰
C	۱۰۰	۴	۱۴۰	۷۵
D	۱۰	۲۰	۱۲	۷/۵

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ــ اعداد شاخص، تغییرات ایجاد شده در یک متغیّر را، در :

۱) طول زمان نشان می‌دهند.

۲) دو مکان مختلف نشان می‌دهند.

۳) طول زمان یا در دو مکان مختلف نشان می‌دهند.

۴) هیچکدام

۲ــ عدد شاخص را غالباً به صورت :

۱) نسبت عددی نشان می‌دهند. ۲) مطلق نشان می‌دهند.

۳) درصد نشان می‌دهند. ۴) نسبت هندسی نشان می‌دهند.

۳ــ ارزش واقعی حقوق دریافتی یک کارگر یا کارمند از :

۱) تقسیم کردن شاخص هزینه‌های زندگی به شاخص پرداختهای حقوق مؤسسات حاصل می‌شود.

۲) تقسیم کردن شاخص پرداختهای حقوق مؤسسات به شاخص هزینه‌های زندگی حاصل می‌شود.

۳) تقسیم کردن شاخص قیمتها به شاخص هزینه‌های زندگی حاصل می‌شود.

۴) تقسیم کردن شاخص پرداختهای حقوق مؤسسات به شاخص قیمتها حاصل می‌شود.

۴ــقدرت خرید پول برابرست با :

۱) $\frac{\text{شاخص قیمتها}}{100}$ ۲) $\frac{100}{\text{شاخص قیمتها}}$

۳) شاخص قیمتها × صد ۴) $\frac{1}{\text{شاخص قیمتها}}$

۵ــ اعداد شاخص می‌توانند :

۱) اطّلاع دهنده باشند. ۲) پیش‌بینی‌کننده باشند.

۳) ارزیابی‌کننده باشند. ۴) هر سه مورد درست است.

۶ــ علّت ضرب کردن اعداد شاخص در عدد صد، این است که :

۱) درک تغییرات ایجاد شده در متغیّر مورد بررسی، ساده‌تر و سریع‌تر انجام می‌پذیرد.

۲) باید به صورت درصد بیان شوند.
۳) امکان مقایسه با سایر اعداد شاخص فراهم می‌شود.
۴) همه کشورها، اعداد شاخص را به‌صورت درصد بیان می کنند.
۷ــ جواب حاصل از کدام روشها برای اعداد شاخص یکسان و مساوی است؟
۱) درصد سادهٔ مجموع و موزون مجموع
۲) درصد سادهٔ مجموع و میانگین سادهٔ نسبتها
۳) میانگین موزون نسبتها و موزون مجموع «لاسپیرز»
۴) میانگین سادهٔ نسبتها و میانگین موزون نسبتها
۸ــ مقصود از روش «زنجیره‌ای» در محاسبهٔ اعداد شاخص :
۱) همان روش درصد سادهٔ مجموع است.
۲) این است که سال قبل را سال پایه در نظر بگیریم.
۳) این است که سال بعد را سال پایه درنظر بگیریم.
۴) شاخصها را برای سالهای متوالی محاسبه کنیم.
۹ــ در کدام روش، از مقادیر سالهای جاری، به‌عنوان ضرایب با اهمیّت استفاده می‌شود؟
۱) روش میانگین موزون نسبتها ۲) روش پاشه
۳) روش لاسپیرز ۴) در هر سه مورد
۱۰ــ محاسبهٔ اعداد شاخص، غالباً در کدام زمینه کاربرد بیشتری دارد؟
۱) در مسائل مالی ۲) در مسائل بازرگانی
۳) در مسائل حسابداری ۴) در مسائل اقتصادی

جدول آزمون معنی‌دار بودن ضریب همبستگی پیرسون

d.f. \ α	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,9877	0,9969	0,9995	0,9999
2	0,9000	0,9500	0,9800	0,9900
3	0,8054	0,8783	0,9343	0,9587
4	0,7293	0,8114	0,8822	0,9172
5	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745
6	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343
7	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977
8	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646
9	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348
10	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079
11	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835
12	0,4575	0.5324	0,6120	0,6614
13	0,4409	0,5139	0,5923	0,6411
14	0,4259	0,4973	0,5742	0,6226
15	0,4124	0,4821	0,5577	0,6055
16	0,4000	0,4683	0,5425	0,5897
17	0,3887	0,4555	0,5285	0,5751
18	0,3783	0,4438	0,5155	0,5614
19	0,3687	0,4329	0,5034	0,5487
20	0,3598	0.4227	0,4921	0,5368
25	0,3233	0,3809	0,4451	0,4869
30	0,2960	0,3494	0,4093	0,4437
35	0,2746	0,3246	0,3810	0,4182
40	0,2573	0,3044	0,3578	0,3932
45	0,2428	0,2875	0,3384	0,3721
50	0,2306	0,2732	0,3218	0,3541
60	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248
70	0,1954	0,2319	0,2737	0,3017
80	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830
90	0,1726	0,2050	0,2422	0,2673
100	0,1638	0,1946	0,2301	0,2540

منابع و مآخذ

۱ـ آلدر، هنری و ادوارد راسلر، مقدمه‌ای بر احتمالات و آمار، ترجمه زالی و شبستری، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۶۵.

۲ـ اردبیلی، محمدحسن، احتمالات و آمار، دهخدا، تهران، ۱۳۴۵.

۳ـ باتاچاریا، گوری و ریچارد جانسون، مفاهیم و روشهای آماری، ترجمه مرتضی ابن شهرآشوب و فتاح میکائیلی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۴.

۴ـ بهبودیان، جواد، آمار و احتمال مقدماتی، آستان قدس رضوی، شیراز، ۱۳۶۸.

۵ـ زهره بخش، محمدعلی و عبدالله‌زاده، یحیی، مقدمه‌ای بر آمار و احتمالات، نشر بشارت، ۱۳۷۳.

۶ـ عادل آذر، منصور مؤمنی، آمار و کاربرد آن در مدیریت، سازمان سمت، تهران ۱۳۷۹.

۷ـ لارسن، هرولد، نظریه احتمالات و نتیجه‌گیری آماری، ترجمه غلامحسین همدانی، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۶۵.

۸ـ لیپشوتز، سیمور، تئوری و مسائل احتمالات، ترجمه عادل ارشقی، نشر نی، تهران، ۱۳۶۶.

۹ـ معین تقوی، احمد، آمار کاربردی در اقتصاد و بازرگانی، مؤسسه مطالعات و پژوهشهای بازرگانی، تهران، ۱۳۷۶.

۱۰ـ منصورفر، کریم، روشهای آماری، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۶۹.

۱۱ـ نصفت، مرتضی، اصول و روشهای آماری، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۵۶.

۱۲ـ وزارت آموزش و پرورش، آمار، تهران، ۱۳۷۰. (کتاب درسی)

۱۳ـ وزارت آموزش و پرورش، آمار بازرگانی، تهران. (کتاب درسی)

۱۴ـ وون‌اکات، توماس و رانلدوون‌اکات، آمار مقدماتی، ترجمه محمدرضا مشکانی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵.

۱۵ـ رنجبران، هادی، آمار و احتمال، نشر کتاب دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۴.

16 – Chris. Spatz - James O. Johnston Basic Statistics Thomson Information Publishing Group.

17 – G.Klimov Probability Theory and Mathematical Statistics - Mir Publishers Moscow.

18 – Murray. R. Spiegel Theory and Problems of Statistics Mc Graw - Hill Book Company.