بسم الله الرحمن الرحیم

# ریاضیات امور مالی

## رشتهٔ حسابداری بازرگانی

## گروه تحصیلی اداری مالی

## زمینهٔ خدمات

## شاخهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای

## شمارهٔ درس ۳۹۶۲


۶۵۷/۴۸ افتخار، رحیم
ر ۶۲۶ الف ریاضیات امور مالی/ مؤلف : رحیم افتخار ــ تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های
۱۳۹۲ درسی ایران، ۱۳۹۲
۱۲۷ ص : مصور ــ (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شمارهٔ درس ۳۹۶۲)
متون درسی رشتهٔ حسابداری بازرگانی گروه تحصیلی اداری مالی، زمینهٔ خدمات
برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا : کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی رشتهٔ حسابداری بازرگانی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش
۱ امور مالی ــ ریاضیات الف ایران وزارت آموزش و پرورش دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش ب عنوان ج فروست


۱۳۹۲

**همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :**

**پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.**

**پیام‌نگار (ایمیل)** **info@tvoccd.sch ir**

**وب‌گاه (وب‌سایت)** **www.tvoccd.sch ir**

این کتاب پس از گردآوری مستندات فرستاده شده از سوی هنرآموزان سراسر کشور و بررسی میدانی از چندین هنرآموز و براساس پایه کتاب قبل در پاییز ۱۳۸۸ توسط اعضای محترم کمیسیون تخصصی داوود سلطانی، دکتر زهرا دیانتی، کبری نورشاهی و شهرزاد کشه‌فراهانی اصلاح و بر مبنای نیازهای حوزهٔ حرفه‌ای تغییرات جزئی در کتاب داده شد

**وزارت آموزش و پرورش**

**سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی**

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش**

نام کتاب : **ریاضیات امور مالی ـ ۴۸۰/۵**

مؤلف : **رحیم افتخار**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

**تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)**

**تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،**

وب‌سایت : **www.chap.sch ir**

صفحه‌آرا : **صغری عابدی**

طراح جلد : **علیرضا رضائی‌کُر**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش)**

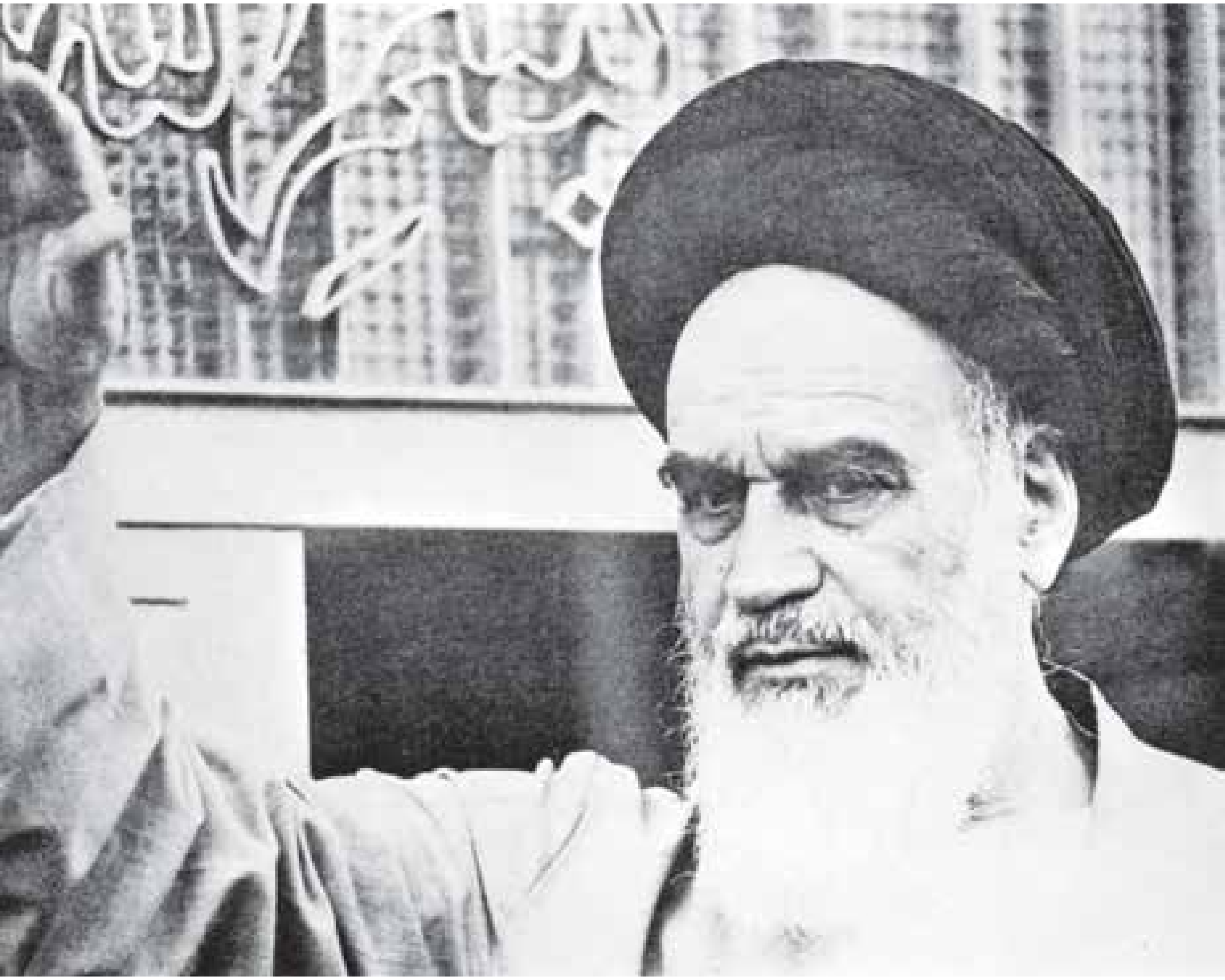
**تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵**

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار : **۱۳۹۲**



**ISBN 964-05-0237-5 شابک ۵-۰۲۳۷-۰۵-۹۶۴**



شما عـزیـزان کـوشش کنید کــه از این وابستگــی بیرون آیید و احتیاجـات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتّکای به اجانب بپرهیزید.

**امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»**

# فهرست مطالب

## مقدمه

امروزه برای رفع بسیاری از مشکلات فرهنگی، اقتصادی، اجتماعی، نظامی و حتی سیاسی، از ریاضیات استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، پاسخ دادن به خیلی از سؤالات با استفاده از ریاضیات عملی‌تر است. مسئولین سطوح مختلف سازمان‌ها، برای تعیین اغلب اقلام مجهول و نامشخص، مثل پیش‌بینی نرخ تورّم یا قیمت نفت در سطح جهان یا نرخ بیکاری، از معادلات با متغیّرها و درجات مختلف استفاده می‌کنند.

هم‌چنین، مدیران برای برنامه‌ریزی دقیق در موقعیت‌های بحرانی و حسّاسی که متغیّرهای زیادی در امور دخالت دارند، ناچارند از تحقیق در عملیّات استفاده کنند. بدیهی است کسانی می‌توانند تحقیق در عملیّات را به خوبی به کار ببرند که با ریاضیات آشنا باشند. در این کتاب سعی شده است، با استفاده از ریاضیات، به حل برخی از مسائل موجود در امور مالی پرداخته شود. امید است با همکاری معلمان محترم مسائل بیش‌تری در زمینه‌های مربوط مطرح و در کلاس ارائه و حل و بحث گردد.

**مؤلف**

## هدف کلی

ایجاد توانایی در انجام محاسبات به‌منظور تسلط در ثبت عملیات حسابداری.

# فصل اوّل

## محاسبات ذهنی

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ ضرب و تقسیم‌های اعداد در «۵،۵۰، ۵۰۰ و . . .» و «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و...» را به‌طور ذهنی انجام دهد.

۲ــ «اعداد بین ۱۰ و ۲۰»، «اعداد دورقمی‌مختوم به ۵» و «مضارب ده‌دهی آن‌ها» را به‌صورت ذهنی درهم ضرب کند.

۳ــ اعداد قابل تبدیل به‌صورت $(a \ . \ b)^2$ و اتّحاد مزدوج را (که شکل ساده پیدا نمایند) با تبدیل آن‌ها به‌طور ذهنی ضرب نماید.

۴ــ «کسرهای متشکّل از صورت و مخرج به شکل عوامل ضرب » را با مهارت ساده نماید و قابلیّت تقسیم اعداد به ۲ تا ۱۱ را تشخیص دهد.

۵ــ کاربرد محاسبات ذهنی را در امور مالی انجام دهد.

## ۱ــ محاسبات ذهنی

### ۱ــ۱ ضرب اعداد در «۵،۵۰، ۵۰۰ و...»

برای ضرب کردن هر عدد در «۵» راه‌های متعدّدی وجود دارد که به یک روش ساده‌ی آن اشاره می‌گردد.

**۱ــ۱ــ ۱** اگر بخواهیم عددی را در «۵» ضرب کنیم، می‌توانیم ابتدا عدد مورد نظر را در «۱۰» ضرب و سپس بر «۲» تقسیم کنیم.

**مثال ۱ــ** عدد ۱۶۵ را در ۵ ضرب کنید.

$$۱۶۵\times ۵=۱۶۵\times \frac{۱۰}{۲}=\frac{۱۶۵۰}{۲}=۸۲۵$$

**انجام عملیّات به‌صورت ذهنی:** صفر را در سمت راست عدد قرار می‌دهیم تا به ۱۶۵۰ تبدیل شود. حال ازسمت چپِ عدد شروع به تقسیم می‌نماییم $\frac{۱۶}{۲}=۸$ سپس ۵ را به ۲ تقسیم می‌کنیم که نتیجه‌ی آن ۲ می‌شود و یک باقی می‌ماند. عدد یک با توجّه به صفر، تبدیل به ده می‌شود که به ۲ تقسیم می‌گردد و پنج نتیجه‌ی آن است. پس، جواب ۸۲۵ می‌شود.

**مثال ۲ــ** عدد ۱۸۴ را در ۵ ضرب کنید.

یک صفر، در سمت راست عدد مزبور قرار می‌دهیم تا به ۱۸۴۰ تبدیل شود. حال از سمت چپِ عدد، شروع به تقسیم می‌نماییم. ۱۸ تقسیم بر ۲ می‌شود ۹، چهار تقسیم بر ۲ می‌شود ۲ و بالأخره صفر تقسیم بر ۲ می‌شود صفر. پس ۹۲۰ جواب سؤال ماست.

**۲ــ۱ــ۱ضرب اعداد در «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و ...»:** برای ضرب کردن هر عدد در ۲۵ راه‌های متعدّدی وجود دارد. امّا در این‌جا تنها به دو روش اشاره می‌گردد.

الف) برای ضرب کردن عددی مانند $A=\overline{a_{n-۱}a_{n-۲}...a_۱a_۰}$ در ۲۵ کافی است به روش‌های ذکر شده، عدد مورد نظر را دوبار در ۵ ضرب نماییم.

**مثال ۳ــ** حاصل‌ضرب عدد ۲۷ در ۲۵ را بیابید. $۲۷\times ۲۵=۲۷\times ۵\times ۵$

۲۷ را دوبار در ۵ ضرب می‌کنیم. $(۲۷\times ۵)\times ۵=۱۳۵\times ۵=۶۷۵$

یادآوری می‌شود برای ضرب هر عدد در ۵ پس از انجام چند تمرین، احتیاجی به قلم و کاغذ نیست.

ب) برای ضرب کردن عددی مانند A در ۲۵ می‌توانیم آن عدد را در ۱۰۰ ضرب و بر ۴ تقسیم نماییم. به‌عبارت دیگر، برای ضرب هر عدد در ۲۵، کافی است دو صفر در سمت راست آن عدد قرار داده، سپس به‌روش ذهنی، عدد جدید را به ۴ تقسیم نماییم.

**مثال ۴ــ** حاصل‌ضرب ۱۴ در ۲۵ را به‌صورت ذهنی پیدا کنید.

$$۱۴\times ۲۵=\frac{۱۴۰۰}{۴}=۳۵۰$$

بدیهی است اگر حاصل‌ضرب عددی در ۲۵۰ یا ۲۵۰۰ مورد نظر باشد کافی است آن عدد را در ۲۵ ضرب کنیم. سپس یک یا دو صفر به سمت راست عدد حاصل اضافه نماییم.

**مثال ۵ــ** حاصل‌ضرب ۲۴۵ در ۲۵۰۰ را به‌صورت ذهنی محاسبه کنید.

$$۲۴۵ \times ۲۵۰۰ = (۲۴۵ \times ۲۵) \times ۱۰۰ = \frac{۲۴۵۰۰}{۴} \times ۱۰۰ = ۶۱۲۵۰۰$$

و یا

$$(۲۴۵ \times ۵) \times ۵ \times ۱۰۰ = (۱۲۲۵ \times ۵) \times ۱۰۰ = ۶۱۲۵۰۰$$

## ۲ــ۱تقسیم اعداد بر «۵، ۵۰، ۵۰۰ و ...»

**۱ــ۲ــ۱**برای تقسیم هر عدد بر **۵**، کافی است آن عدد را در **۲** ضرب و بر ۱۰ تقسیم نماییم.

**مثال ۶ــ** حاصل تقسیم ۱۴۰ بر **۵** را بیابید.

$$۱۴۰ \div ۵ = \frac{۱۴۰ \times ۲}{۱۰} = \frac{۲۸۰}{۱۰} = ۲۸$$

**۲ــ۲ــ۱** برای تقسیم هر عدد بر **۵۰**، می‌توان آن عدد را در **۲** ضرب نمود و بر ۱۰۰ تقسیم کرد. برای تقسیم بر ۵۰۰ و ۵۰۰۰ و ... نیز به همین شکل، قابل محاسبه است.

**مثال ۷ــ** حاصل تقسیم ۱۸۶ بر **۵۰** را محاسبه کنید.

$$۱۸۶ \div ۵۰ = \frac{۱۸۶ \times ۲}{۱۰۰} = \frac{۳۷۲}{۱۰۰} = ۳/۷۲$$

**مثال ۸ــ** حاصل‌تقسیم ۲۷۰۰۰ بر **۵۰۰** را پیدا نمایید.

$$۲۷۰۰۰ \div ۵۰۰ = \frac{۲۷۰۰۰ \times ۲}{۱۰۰۰} = \frac{۵۴۰۰۰}{۱۰۰۰} = ۵۴$$

## ۳ــ۱ تقسیم اعداد بر «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰و ...»

**۱ــ۳ــ۱** برای تقسیم هر عدد بر **۲۵**، می‌توان آن‌را در **۴** ضرب و بر ۱۰۰ تقسیم کرد. (زیرا $۲۵ = \frac{۱۰۰}{۴}$ است.)

**مثال ۹ــ ۶۲۵** را بر **۲۵** تقسیم و سپس پاسخ را مشخّص کنید.

$$۶۲۵ \div ۲۵ = \frac{۶۲۵ \times ۴}{۱۰۰} = \frac{۲۵۰۰}{۱۰۰} = ۲۵$$

**۲ــ۳ــ۱**برای تقسیم هر عدد بر ۲۵۰ یا ۲۵۰۰ یا ... کافی است آن عدد را در **۴** ضرب و بر ۱,۰۰۰ یا ۱۰,۰۰۰ و یا ... تقسیم کنیم، زیرا $\frac{۴}{۱,۰۰۰} = \frac{۱}{۲۵۰}$ و $\frac{۴}{۱۰,۰۰۰} = \frac{۱}{۲۵۰۰}$ است.

**مثال ۱۰ــ** حاصل تقسیم ۳۵۰۰ بر ۲۵۰ را محاسبه کنید.

$$۳۵۰۰ \div ۲۵۰ = ۳۵۰۰ \times \frac{۴}{۱,۰۰۰} = \frac{۱۴۰۰۰}{۱,۰۰۰} = ۱۴$$

**مثال ۱۱ــ** حاصل تقسیم ۴۵۶۰ بر ۲۵۰۰ را پیدا کنید.

$$۴,۵۶۰ \div ۲,۵۰۰ = ۴,۵۶۰ \times \frac{۴}{۱۰,۰۰۰} = \frac{۱۸۲۴۰}{۱۰,۰۰۰} = ۱/۸۲۴$$

## ۴ــ۱ ضرب عدد دورقمی بین ۱۰ و ۲۰ در خودش

برای ضرب دو عدد دورقمی که بین ۱۰ و ۲۰ قرار دارند باید به این نکته توجه داشت که نتیجه، عددی سه رقمی بین $۱۰۰ = ۱۰^{۲}$ و $۴۰۰ = ۲۰^{۲}$ است.

برای پیدا کردن حاصل‌ضرب اعداد دو رقمی بین ۱۰ و ۲۰ در خودش به طریق زیر عمل می‌کنیم.

**الف)** رقم یکان آن دو عدد را در هم ضرب می‌کنیم. اگر حاصل یک‌رقمی‌است، آن‌را به‌نشانه‌ی اوّلین رقم سمت راست می‌نویسیم و اگر دو رقمی‌است رقم یکان آن‌را می‌نویسیم و دهگان آن را، یعنی ده بر یک یا بیست بر دو و یا ... در حافظه‌ی خود نگه می‌داریم.

**ب)** رقم یکان آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و اگر دهگانی از قبل داشته باشیم به آن می‌افزاییم و به‌نشانه‌ی دومین رقم ثبت می‌نماییم. بدیهی است درصورتی که دهگانی داشته باشد به حافظه می‌سپاریم.

**ج)** رقم دهگان آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و درصورتی که ازقبل دهگانی در حافظه داشته باشیم با آن جمع می‌کنیم و به‌نشانه‌ی سومین رقم در کنار رقم‌های قبلی می‌نویسیم.

**مثال ۱۲ــ** عدد ۱۳ را در خودش ضرب و نتیجه را محاسبه کنید.

الف) حاصل‌ضرب ۳×۳ رقم یکان را تشکیل می‌دهد. $۱۳ \times ۱۳$

ب) حاصل جمع ۳+۳ رقم دهگان را تشکیل می‌دهد.

ج) حاصل‌ضرب ۱×۱ رقم صدگان را تشکیل می‌دهد. ۱۶۹

**مثال ۱۳ــ** حاصل‌ضرب ۱۴×۱۴ را به‌دست آورید.

الف) حاصل‌ضرب ۴×۴ می‌شود ۱۶ ؛ ۶ را به‌نشانه‌ی رقم یکان می‌نویسیم و ۱ را در حافظه نگه می‌داریم.

ب) حاصل جمع ۴+۴ می‌شود ۸ ؛ آن‌را با عدد ۱ قبلی جمع می‌کنیم، حاصل رقم دهگان را

تشکیل می‌دهد (یعنی ۹).

ج) حاصل ضرب ۱×۱ برابر با ۱ خواهد بود که رقم صدگان را مشخص می‌نماید. درنتیجه جواب ۱۹۶ است.

**مثال ۱۴ــ** ۱۹×۱۹ را محاسبه نمایید.

الف) حاصل‌ضرب ۹×۹ می‌شود ۸۱ ؛ ۱ را به‌نشانه‌ی رقم یکان می‌نویسیم و هشتاد بر هشت را در حافظه نگه می‌داریم.

ب) حاصل جمع ۹ + ۹ می‌شود ۱۸، به‌علاوه ۸ قبلی می‌شود ۲۶ ؛ ۶ را به‌نشانه‌ی رقم دهگان می‌نویسیم و بیست بر دو را در حافظه نگه می‌داریم.

ج) حاصل‌ضرب ۱×۱ برابر با یک است، که با ۲ قبلی جمع می‌شود و حاصل آن ۳ می‌گردد که آن را به‌نشانه‌ی رقم صدگان درنظر می‌گیریم. پس جواب نهایی ۳۶۱ است.

**مثال ۱۵ــ** حاصل‌ضرب ۱۵×۱۵ را محاسبه نمایید.

الف) ۲۵ = ۵ × ۵ اوّلین رقم ۵ است.

ب) ۱۰ = ۵ + ۵ ، با ۲ قبلی جمع می‌شود پس دومین رقم (دهگان) ۲ است.

ج) ۱ = ۱×۱، با ۱ قبلی جمع می‌شود پس رقم صدگان نیز ۲ است.

در نهایت، جواب ما ۲۲۵ است.

## ۵ ــ۱ ضرب اعداد دورقمی‌مختوم به ۵ در خودش

برای پیدا کردن حاصل‌ضرب این گونه اعداد باید به این نکته توجه نمود که نتیجه، عددی سه یا چهاررقمی است و دو رقم سمت راست حاصل‌ضرب این نوع اعداد، همیشه ۲۵ خواهد بود. برای پیدا کردن حاصل‌ضرب به‌طریق زیر عمل می‌کنیم.

به رقم دهگان یکی از اعداد، یک می‌افزاییم و در رقم دهگان دیگری ضرب می‌نماییم. حاصل‌ضرب را می‌نویسیم و ۲۵ را در سمت راست آن عدد قرار می‌دهیم.

$$\overline{a۵} \times \overline{a۵} = \overline{(a+۱)\times(a)(۲۵)}$$

دو رقم سمت راست حاصل‌ضرب این نوع اعداد همیشه ۲۵ خواهد بود.

**مثال ۱۶ــ** حاصل‌ضرب ۳۵ × ۳۵ را محاسبه کنید.

یک عدد به ۳ می‌افزاییم و در ۳ ضرب می‌نماییم $\qquad (۳+۱)(۳) = ۱۲$

حاصل ۱۲ است. سپس ۲۵ را در سمت راست آن قرار می‌دهیم.

جواب می‌شود ۱۲۲۵

نتیجه برابر است با حاصل‌ضرب ۳۵×۳۵

**مثال ۱۷ــ** حاصل‌ضرب ۸۵×۸۵ را پیدا کنید.

جواب می‌شود ۷۲۲۵  (۸+۱)(۸) = ۷۲

## ۶ــ۱ ضرب دو عدد با استفاده از اتّحاد مزدوج

**یادآوری:** اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b)=a^{2}-b^{2}$

در ضرب دو عدد، گاهی می‌توان از اتّحاد مزدوج استفاده نمود و جواب را محاسبه کرد. زمانی که فاصله‌ی اضافی و نقصانی دو عدد نسبت به عدد مختوم به صفر مثل ۱۰۰ یا ۱,۰۰۰ یا ۵۰ و یا ... به یک اندازه باشد، می‌توان از این اتحاد استفاده نمود و پاسخ را محاسبه کرد.

**مثال ۱۸ــ** حاصل‌ضرب ۹۹×۱۰۱ را پیدا کنید.

چون فاصله هر دو عدد نسبت به ۱۰۰ به یک اندازه است، ازاتّحاد مزدوج استفاده می‌نماییم.

(۱۰۰+۱)(۱۰۰−۱) = ۱۰,۰۰۰−۱ = ۹,۹۹۹

عدد مختوم به صفر را a فرض می‌کنیم و فاصله‌ی آن اعداد تا a را b می‌نامیم.

به‌عبارت دیگر، نصف مجموع دو عدد را a و نصف تفاضل آن دو عدد را b فرض می‌کنیم و با استفاده از فرمول اتّحاد مزدوج، پاسخ به‌راحتی قابل محاسبه است.

**مثال ۱۹ــ** حاصل‌ضرب ۹۹۷×۱۰۰۳ را محاسبه کنید.

حاصل جمع این دو عدد ۲۰۰۰ است، درنتیجه نصف آن ۱۰۰۰ می‌شود.

تفاضل این دو عدد ۶ است ؛ درنتیجه نصف آن ۳ می‌شود.

بنابراین : ۱۰۰۳×۹۹۷ = ۱,۰۰۰,۰۰۰−۹ = ۹۹۹,۹۹۱

**مثال ۲۰ــ** حاصل‌ضرب ۹,۹۹۵×۱۰۰۰۵ را محاسبه کنید.

مجموع این دو عدد ۲۰۰۰۰ است، درنتیجه نصف آن ۱۰۰۰۰ می‌شود.

تفاضل این دو عدد ۱۰ است، در نتیجه نصف آن ۵ می‌شود.

بنابراین : (۱۰,۰۰۰+۵) (۱۰,۰۰۰−۵) = ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰−۲۵ = ۹۹,۹۹۹,۹۷۵

**مثال ۲۱ــ** حاصل‌ضرب ۵۹×۶۱ را پیدا کنید.

نصف مجموع این دو عدد ۶۰ و نصف تفاضل این دو عدد ۱ است.

بنابراین : (۶۰+۱) (۶۰−۱) = ۳۶۰۰−۱ = ۳,۵۹۹

## ۷ــ۱ مجذور نمودن اعداد با استفاده از اتحاد اوّل و دوم

یادآوری :

اتحاد اوّل $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

اتحاد دوم $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

برای مجذور کردن اعدادی که نزدیک به اعداد مختوم به صفرند، می‌توان از این اتحادها استفاده نمود و به‌صورت ذهنی پاسخ را پیدا کرد. در این‌گونه موارد باید بتوان عدد مورد نظر را که قرار است مجذور شود، تبدیل به مجموع یا تفاضل دو عددی نمود که لااقل یکی مختوم به صفر باشد سپس با استفاده از فرمول پاسخ را مشخص نمود. به مثال‌های زیر توجّه کنید تا موضوع روشن‌تر شود.

**مثال ۲۲ــ** عدد ۱,۰۰۱ را به توان ۲ برسانید.

فرض می‌کنیم $a=1000$ و $b=1$ است. بنابراین، با استفاده از اتّحاد اوّل می‌توان نوشت :

$$(1{,}000+1)^2 = 1{,}000{,}000+1+2{,}000 = 1{,}002{,}001$$

**مثال ۲۳ــ** عدد ۱,۹۹۹ را به توان ۲ برسانید.

فرض می‌کنیم $a=2{,}000$ و $b=1$ است ؛ بنابراین، با استفاده از اتحاد دوم، می‌توان نوشت :

$$(2{,}000-1)^2 = 4{,}000{,}000+1-4{,}000 = 3{,}996{,}001$$

## ۸ ــ۱ نحوه‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد بر ۲ تا ۱۱

اگر بخواهیم ببینیم در عدد $a$ چند عدد $b$ وجود دارد، باید $a$ را بر $b$ تقسیم کنیم. $a$ را مقسوم و $b$ را مقسوم‌علیه نامند. از تقسیم این دو، عددی مانند $q$ به‌نام خارج قسمت به‌دست می‌آید که نشانگر تعداد $b$هایی است که در $a$ وجود دارد و هم‌چنین ممکن است باقی‌مانده‌ای کوچک‌تر از مقسوم علیه داشته باشد که آن‌را با $r$ نمایش می‌دهیم. این رابطه $a = b\times q + r$ وقتی درست است که $r < b$ باشد. بدیهی است درصورتی‌که $r = 0$ باشد، آن‌گاه می‌توان گفت که $a$ بر $b$ قابل تقسیم است. مثل ۷۶ که بر ۲ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن صفر است. امّا ۷۷ بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی آن مخالف صفر است (باقی‌مانده‌ی آن ۱ است).

**۱ــ ۸ ــ ۱ قابلیّت تقسیم بر ۲:** عددی به ۲ قابل قسمت است که رقم یکان آن زوج یا صفر باشد. چنان‌چه آخرین رقم سمت راست آن عدد فرد باشد، نتیجه می‌گیریم که آن عدد بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌اش یک است.

**مثال ۲۴ــ** آیا ۴۲۱ بر دو قابل قسمت است؟ چنان‌چه جواب منفی است، باقی‌مانده‌ی آن‌را پیدا کنید.

چون آخرین رقم سمت راست این عدد فرد است ؛ بنابراین بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی آن یک است.

**مثال ۲۵ــ** آیا ۷۱۸ بر دو قابل قسمت است؟ باقی‌مانده‌ی آن‌را نیز معیّن کنید. چون آخرین رقم سمت راست آن زوج است، پس به ۲ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۲، صفر است.

**۲ــ۸ ــ۱ قابلیّت تقسیم بر ۳:** عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد. در این‌صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۳ صفر است. چنان‌چه عددی بر ۳ قابل قسمت نباشد، باقی‌مانده‌ی آن عدد بر ۳، یک یا دو است. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی عددی که به ۳ قابل قسمت نیست، باید از مجموع ارقام آن مضرب‌های ۳ را کسر نمود.

**مثال ۲۶ــ** آیا ۲۳۱ بر ۳ قابل قسمت است؟ باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌را بر ۳ نیز تعیین کنید. چون ۶ = ۱ + ۳ + ۲ است و عدد ۶ مضرب ۳ است، پس این عدد به ۳ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن صفر است.

**مثال ۲۷ــ** آیا ۳۲۲ بر ۳ قابل قسمت است؟ باقی‌مانده‌ی تقسیم آن را بر ۳ نیز معیّن نمایید. چون ۷ = ۲ + ۲ + ۳ ، مضرب ۳ نیست پس عدد ۳۲۲ بر ۳ قابل قسمت نیست. برای تعیین باقی‌مانده، کافی است نزدیک‌ترین مضرب ۳ را از مجموع ارقام آن کم نماییم :

۷ − ۶ = ۱

یا عدد ۷ را بر ۳ تقسیم کرد، تا باقی‌مانده‌ی یک به‌دست آید.

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم ۳۲۲ بر ۳، برابر با ۱ است.

**۳ــ۸ ــ۱ قابلیّت تقسیم بر ۴:** عددی به ۴ قابل قسمت است که دو رقم سمت راست آن صفر یا بر ۴ قابل قسمت باشد. چنان‌چه عددی بر ۴ قابل قسمت نباشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۴ عدد ۱، ۲ یا ۳ است. برای یافتن باقی‌مانده‌ی عددی که به چهار قابل قسمت نباشد، باید نزدیک‌ترین عدد مضرب ۴ را از آن عدد کم نمود تا باقی‌مانده‌ای کوچک‌تر از ۴ به‌دست آید.

**مثال ۲۸ــ** آیا عدد ۵۱۲۴ به ۴ قابل قسمت است؟

چون ۲۴ به ۴ قابل قسمت است، پس این عدد به ۴ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۴، صفر است.

**مثال ۲۹ــ** آیا عدد ۷۲۴۳ به ۴ قابل قسمت است؟ باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌را بر ۴ نیز پیدا کنید.

از آن‌جا که ۴۳ به ۴ قابل قسمت نیست عدد ۷۲۴۳ نیز به ۴ قابل قسمت نیست. روشن است که باقی‌مانده‌ی تقسیم ۴۳ بر ۴ عددی به‌جز ۳ نیست. بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۴ عدد ۳ است.

**روش دیگر:** رقم یکان را در $۲^{۰}$ و رقم دهگان را در $۲^{۱}$ ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌نماییم. اگر حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد مضارب ۴ را از آن کم می‌کنیم تا مانده به کم‌تر از چهار برسد.

$$(۳\times ۲^{۰})+(۴\times ۲^{۱})=۳+۸=۱۱$$

$$۱۱-۸=۳$$

**۴ــ ۸ ــ۱ قابلیّت تقسیم بر ۵:** عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم اوّل سمت راست آن صفر یا پنج باشد. درغیراین‌صورت، آن عدد بر ۵ قابل قسمت نیست. برای تعیین باقی‌مانده‌ی آن عدد بر ۵ کافی است به رقم اوّل سمت راست آن توجّه کنیم. اگر این رقم از ۵ کوچک‌تر است، پس باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۵، خود این عدد است. ولی اگر این رقم بیش‌تر از ۵ باشد باید ۵ واحد از آن کم کرد تا باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۵ مشخص گردد.

**مثال ۳۰ــ** آیا عدد ۴۶۵ به ۵ قابل قسمت است؟ باقی‌مانده‌ی آن‌را نیز تعیین کنید.

چون رقم اوّل سمت راست آن ۵ است، پس این عدد به ۵ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۵، صفر است.

**مثال ۳۱ــ** آیا عدد ۷۵۳۸ به ۵ قابل قسمت است؟ باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌را بر ۵ نیز معیّن کنید.

از آن‌جا که رقم اوّل سمت راست آن صفر یا پنج نیست، پس این عدد بر پنج قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی آن بر پنج برابر با ۳ است، زیرا $۸-۵=۳$

**۵ ــ ۸ ــ۱ قابلیّت تقسیم بر ۶:** عددی بر ۶ قابل قسمت است که هم بر ۲ و هم بر ۳ قابل قسمت باشد. در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۶، صفر است. اگر عددی بر ۶ قابل قسمت نباشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۶، عددی کوچک‌تر از آن است. برای پیدا کردن باقی‌مانده کافی است نزدیک‌ترین عدد مضرب ۶ را از آن عدد کم نمود تا باقی‌مانده‌ای کوچک‌تر از ۶ به‌دست آید.

**مثال ۳۲ــ** آیا عدد ۷۶۷۱ بر ۶ قابل قسمت است؟

با توجه به این‌که این عدد، زوج نیست پس بر ۲ قابل قسمت نیست، درنتیجه بر ۶ نیزقابل قسمت نخواهد بود. برای پیدا کردن باقی‌مانده کافی است عدد ۷۶۶۸ را که نزدیک‌ترین عدد مضرب ۶ به آن عدد است از آن کم نمود.

$$۷۶۷۱ - ۷۶۶۸ = ۳$$

پس باقی‌مانده برابر با ۳ است.

**مثال ۳۳ـ** آیا عدد ۴۳۲ بر ۶ قابل قسمت است؟

از آن‌جا که این عدد زوج است، پس بر ۲ قابل قسمت است. از طرفی مجموع ارقامش $(۹ = ۲ + ۳ + ۴)$، ۹ است که بر ۳ قابل قسمت است. درنتیجه، این عدد بر ۶ قابل قسمت و باقی‌مانده‌ی آن صفر است.

**۶ ــ ۸ ــ ۱ قابلیّت تقسیم بر ۷:** عددی بر هفت قابل قسمت است که باقی‌مانده‌ی آن بر هفت صفر است. برای این‌که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A، $A = \overline{a_{n-۱}a_{n-۲}...a_۲a_۱a_۰}$ بر ۷ را به‌دست آوریم، به‌شرح زیر عمل می‌کنیم:

اوّلین رقم سمت چپ عدد مورد نظر یعنی $a_{n-۱}$ را سه برابر می‌کنیم و با رقم بعدی یعنی $a_{n-۲}$ جمع می‌نماییم. سپس مضرب‌های هفت آن‌را کسر و باقی‌مانده را سه برابر می‌کنیم و با $a_{n-۳}$ جمع می‌نماییم. پس از کسر مضارب هفت از آن، مجدّداً به همین روش ادامه می‌دهیم تا باقی‌مانده‌ی نهایی حاصل شود.

**مثال ۳۴ـ** باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۵۴۷۲ بر ۷ را پیدا کنید.

رقم ۵ را ابتدا سه برابر و سپس آن را با ۴ جمع می‌کنیم. $۵ \times ۳ = ۱۵$

$۱۵ + ۴ = ۱۹$

مضرب ۷ یعنی ۱۴ را از آن کم می‌کنیم؛ باقی‌مانده ۵ می‌شود. $۱۹ - ۱۴ = ۵$

$۵ \times ۳ = ۱۵$

۵ را ابتدا سه برابر و سپس آن را با ۷ جمع می‌کنیم. $۱۵ + ۷ = ۲۲$

مضرب هفت یعنی ۲۱ را از آن کسر می‌نماییم. $۲۲ - ۲۱ = ۱$

نتیجه یعنی ۱ را سه برابر و سپس آن را با ۲ جمع می‌کنیم. $۱ \times ۳ = ۳$

عدد ۵ حاصل می‌شود که باقی‌مانده تقسیم عدد ۵۴۷۲ بر ۷ است. $۳ + ۲ = ۵$

**مثال ۳۵ـ** آیا عدد ۱۸۱۳ به هفت قابل قسمت است؟

$۱ \times ۳ = ۳$

اولین رقم را سه برابر می‌نماییم و نتیجه را با دومین رقم جمع می‌کنیم. $۳+۸=۱۱$

$۱۱-۷=۴$

مضرب ۷ را از آن کسر و مجدّداً سه برابر می‌کنیم. $۴\times۳=۱۲$

$۱۲+۱=۱۳$

و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم. $۱۳-۷=۶$

$۶\times۳=۱۸$

$۱۸+۳=۲۱$

$۲۱-۲۱=۰$

نتیجه صفر می‌شود، پس عدد ۱۸۱۳ بر ۷ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن بر ۷، صفر است.

**۷ــ۸ــ ۱ قابلیّت تقسیم بر ۸:** عددی به ۸ قابل قسمت است که عدد متشکل از سه رقم اوّل سمت راست آن، به هشت قابل قسمت باشد، و یا سه رقم سمت راست آن صفر باشد.

برای پیداکردن باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A، $A=\overline{a_{n-۱}a_{n-۲}\dots a_۲a_۱a_۰}$ بر ۸ کافی است باقی‌مانده‌ی عدد $\overline{a_۲a_۱a_۰}$ را بر ۸ محاسبه نماییم. به عبارت دیگر باقی‌مانده‌ی سه رقم اول سمت راست آن عدد را بر ۸ حساب می‌کنیم یعنی رقم یکان را در $۲^۰$، رقم دهگان را در $۲^۱$ و رقم صدگان را در $۲^۲$ ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم، در صورتی‌که حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۸ باشد، مضارب ۸ را از آن کم می‌کنیم تا مانده به کم‌تر از ۸ برسد.

**مثال ۳۶ــ** آیا عدد ۱۸۴۸ به هشت قابل قسمت است؟

از آن‌جا که ۸۴۸ به هشت قابل قسمت است، پس ۱۸۴۸ نیز به هشت قابل قسمت است. (برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی ۸۴۸ به ۸، اوّلین رقم سمت چپ را با ۸ مقایسه می‌کنیم تا درصورتی‌که بزرگ‌تر یا مساوی ۸ باشد ۸ را از آن کسر نماییم، سپس باقی‌مانده را با رقم بعدی یعنی ۴ کنار هم قرار می‌دهیم و مجدّداً مضرب ۸ را از آن کم می‌کنیم و بالأخره باقی‌مانده را با آخرین رقم یعنی ۸ کنار هم قرار می‌دهیم و مضرب ۸ را از آن کم می‌کنیم. باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۸ مشخص می‌گردد.)

**مثال ۳۷ــ** آیا عدد ۵,۴۷۳,۰۰۰ به ۸ قابل قسمت است؟

چون سه رقم سمت راست آن صفر است، پس این عدد به ۸ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۸، برابر با صفر است.

**مثال ۳۸ــ** آیا عدد ۷۴۵۵ به ۸ قابل قسمت است؟

چون ۴۵۵ به ۸ قابل قسمت نیست (عدد فرد است)، پس ۷۴۵۵ نیز به ۸ قابل قسمت نیست.
امّا برای یافتن باقی‌مانده که عددی بزرگ‌تر از صفر و کم‌تر از ۸ است، لازم است نزدیک‌ترین عدد سه‌رقمی مضرب ۸ به ۴۵۵ را پیدا نمود و از ۴۵۵ کم کرد که آن عدد ۴۴۸ است.

$$۴۵۵ - ۴۴۸ = ۷$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۷۴۵۵ بر ۸، برابر با ۷ است. بدیهی است اگر از عدد ۷۴۵۵ عدد ۷ را کم کنیم، عددی باقی می‌ماند که به ۸ قابل قسمت است.

$$۷۴۵۵ - ۷ = ۷۴۴۸$$

$$(۵\times ۲^{۰}) + (۵\times ۲^{۱}) + (۴\times ۲^{۲}) = ۵ + ۱۰ + ۱۶ = ۳۱$$

رقم یکان را در $۲^{۰}$، رقم دهگان را در $۲^{۱}$ و رقم صدگان را در $۲^{۲}$ ضرب می‌کنیم و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. چون ۳۱ بزرگ‌تر از ۸ است ۲۴ را از آن کم می‌کنیم $۷ = ۲۴ - ۳۱$ پس باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۷۴۵۵ بر ۸ برابر با ۷ است.

ملاحظه می‌شود که ۷۴۴۸ به ۸ قابل قسمت است زیرا ۴۴۸ به ۸ قابل قسمت است.

**۸ـــ۸ـــ۱ قابلیّت تقسیم بر ۹:** عددی به ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش به ۹ قابل قسمت باشد. بدیهی است اگر از مجموع ارقامش نزدیک‌ترین مضرب ۹ را کسر کنیم و باقی‌مانده، عددی کوچک‌تر از ۹ شود، این عدد، باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۹ است.

**مثال ۳۹ـــ** آیا ۲۹۳۴ به ۹ قابل قسمت است؟

مجموع ارقام آن عدد را محاسبه می‌نماییم: $۲ + ۹ + ۳ + ۴ = ۱۸$

چون ۱۸ مضرب ۹ است، پس آن عدد به ۹ قابل قسمت است.

**مثال ۴۰ـــ** آیا ۵۳۷۶ به ۹ قابل قسمت است؟

مجموع ارقام آن عدد را محاسبه می‌کنیم: $۵ + ۳ + ۷ + ۶ = ۲۱$

مضرب ۹ را از آن کم می‌نماییم: $۲۱ - ۱۸ = ۳$

پس، این عدد به ۹ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۹، برابر با ۳ است.

**۹ـــ۸ـــ۱ قابلیت تقسیم بر ۱۰:** عددی به ۱۰ قابل قسمت است که اوّلین رقم سمت راست آن صفر باشد. بدیهی است اگر رقم سمت راست آن، رقمی غیر از صفر باشد، همان رقم باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است.

**مثال ۴۱ـــ** آیا ۲۶۵۴ بر ۱۰ قابل قسمت است؟ اگر جواب منفی است باقی‌مانده‌ی آن را محاسبه کنید.

چون اوّلین رقم سمت راست آن صفر نیست، پس این عدد بر ۱۰ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۰، عدد ۴ است زیرا اوّلین رقم سمت راست آن ۴ است.

**مثال ۴۲ـــ** آیا ۵۶۷۰ بر ۱۰ قابل قسمت است؟ چون رقم اوّل سمت راست آن عدد صفر است، پس بر ۱۰ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن صفر خواهد بود.

**۱۰ــ۸ ــ ۱ قابلیّت تقسیم بر ۱۱:** فرض کنیم عدد صحیح A شامل n رقم باشد $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ مکان ارقام A را از راست به چپ، به‌ترتیب زوج و فرد، درنظر می‌گیریم و سپس ارقام در مکان‌های زوج را پس از جمع، از مجموع ارقام مکان‌های فرد منها می‌کنیم، اگر باقی‌مانده صفر باشد، عدد بر۱۱قابل قسمت است. ولی اگر باقی‌مانده مثبت و کم‌تر از ۱۱ بود، همان عدد باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A بر ۱۱ خواهد بود. امّا اگر باقی‌مانده منفی یا مثبت و بزرگ‌تر از ۱۱ بود، آن‌گاه باید مضرب ۱۱ را به‌آن اضافه یا کم نمود تا باقی‌مانده‌ی واقعی که کوچک‌تر از ۱۱ است، به‌دست آید.

**مثال ۴۳ـــ** بررسی کنید که عدد ۲۷۴۹۳ بر ۱۱ بخش‌پذیر است یا خیر؟

چنان‌چه جواب منفی است، باقی‌مانده‌ی آن‌را بر ۱۱ پیدا کنید.

$$(۳+۴+۲)-(۹+۷)=۹-۱۶=-۷$$

$$-۷+۱۱=۴$$

ارقام در مکان‌های زوج را با هم و ارقام در مکان‌های فرد را نیز با هم جمع می‌نماییم. تفاوت آن‌ها ۷− است، که با اضافه‌کردن ۱۱ به‌آن، نتیجه ۴ می‌شود. پس، این عدد بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۱، عدد ۴ است.

**مثال ۴۴ـــ** آیا ۱۱۹۳۵ بر ۱۱ قابل قسمت است؟

ارقام در مکان‌های زوج را با هم $\quad ۵+۹+۱=۱۵$

و ارقام در مکان‌های فرد را با هم جمع می‌نماییم. $\quad ۳+۱=۴$

تفاوت آن‌ها ۱۱ است. $\quad ۱۵-۴=۱۱$

چون ۱۱ مضرب ۱۱ است، پس آن عدد به ۱۱ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۱ نیز، صفر می‌شود.

## ۹ــ۱ ساده کردن کسر

اگر صورت و مخرج کسری، دارای عامل مشترکی **مخالف صفر** و غیر از یک باشند، می‌توانیم آن‌ها را بر آن عامل مشترک تقسیم کنیم. به عبارت دیگر، برای ساده کردن کسر باید صورت و مخرج آن‌را جداگانه به ***عوامل ضرب تجزیه*** نمود. سپس در صورت اشتراک عوامل ضرب، **مخالف صفر** بین صورت و مخرج آن‌ها را حذف کرد.

بدیهی است چنان‌چه هیچ عامل مشترکی بین صورت و مخرج به‌جز ۱ نباشد، نتیجه می‌گیریم که این کسر ساده نیست. به این نوع کسرها، کسر تحویل‌ناپذیر گویند.

**مثال ۴۵ــ** در صورت امکان، کسر $\frac{۲۱}{۲۲}$ را ساده کنید.

$$\frac{۲۱}{۲۲}=\frac{۳\times۷}{۲\times۱۱}$$

چون در صورت و مخرج کسر هیچ عامل مشترکی یافت نمی‌شود این کسر تحویل‌ناپذیر است و ساده نمی‌شود.

**مثال ۴۶ــ** در صورت امکان، کسر $\frac{۱۵۰}{۲۱}$ را ساده کنید.

$$\frac{۱۵۰}{۲۱}=\frac{۲\times\cancel{۳}\times۵\times۵}{\cancel{۳}\times۷}$$

تنها عامل مشترک بین صورت و مخرج ۳ است. پس :

$$\frac{۱۵۰}{۲۱}=\frac{۵۰}{۷}$$

**مثال ۴۷ــ** در صورت امکان ،کسر $\frac{۲۱۰}{۳۱۵}$ را ساده کنید.

$$\frac{۲۱۰}{۳۱۵}=\frac{۲\times\cancel{۳}\times\cancel{۵}\times\cancel{۷}}{\cancel{۳}\times\cancel{۵}\times\cancel{۷}\times۳}$$

$$\frac{۲۱۰}{۳۱۵}=\frac{۲}{۳}$$

عوامل مشترک ۳، ۵، ۷ بین صورت و مخرج قابل حذف کردن‌اند. بنابراین، با حذف آن‌ها کسر $\frac{۲}{۳}$ حاصل می‌گردد.

## ۱۰ــ۱ کاربرد محاسبات ذهنی در امور مالی

همان‌طور که در درس حسابداری خوانده‌اید، حسابداران معمولاً در پایان دوره‌ی مالی، فهرستی از حساب‌های دفتر کل و مانده‌ی آن‌ها را تحت عنوان «تراز آزمایشی» تهیه می‌کنند تا بر این اساس راحت‌تر بتوانند صورت‌های مالی را تهیه نمایند. از طرف دیگر اگر جمع کل ارقام ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی با هم برابر باشد، حسابداران از صحت ثبت، انتقال و مانده‌گیری حساب‌ها تا حد بسیار بالایی اطمینان حاصل می‌کنند. امّا اگر جمع کل ارقام ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی با هم برابر نباشد، در این‌صورت اشتباهی رخ داده و حسابدار موظف است آن را بیابد و برطرف نماید. برای این‌که حسابداران بتوانند اشتباه را از میان انبوه ثبت‌های دفتر روزنامه و نیز صفحات دفتر کل سریع‌تر پیدا کنند، باید از محاسبات ذهنی استفاده کنند. به این ترتیب که اگر اختلاف جمع دو ستون بدهکار و بستانکار تراز آزمایشی قابل تقسیم بر عدد ۲ باشد در این‌صورت به احتمال زیاد، اشتباهاً یک بدهکار در سمت بستانکار ثبت شده یا بالعکس. برای مثال، اگر در انتقال ارقام از دفتر روزنامه به دفتر کل ۲۵۰ ریال بدهکار حساب دریافتنی را اشتباهاً به بستانکار حساب دریافتنی در دفتر کل منتقل کرده باشیم در این‌صورت وقتی تراز آزمایشی را از روی مانده‌ی ارقام دفتر کل تهیه می‌کنیم، بین ستون بدهکار و بستانکار جمعاً ۵۰۰ ریال اختلاف وجود دارد که ۵۰۰ عددی قابل تقسیم بر عدد ۲ است. از تقسیم ۵۰۰ بر ۲ عدد ۲۵۰ به‌دست می‌آید و به‌این ترتیب حسابدار متوجه می‌شود که برای رفع اشتباه موجود باید عدد ۲۵۰ را در دفتر روزنامه و دفتر کل ردیابی کند. مثال دیگر این که اگر اختلاف دو ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی قابل تقسیم بر عدد ۹ باشد، در این‌صورت اختلاف موجود می‌تواند ناشی از جا انداختن یا اضافه نوشتن یک صفر آخر اعداد یا ثبت مقلوب (مثلاً ۳۲ را اشتباهاً ۲۳ بنویسیم) باشد. برای مثال، اگر رقم وجه‌نقد را به جای ۲۱۰۰۰ ریال اشتباهاً ۲۱۰۰ ریال به دفتر کل منتقل کنیم در این‌صورت در تراز آزمایشی جمع ۲ ستون بدهکار و بستانکار به اندازه‌ی ۱۸۹۰۰ ریال = (۲۱۰۰-۲۱۰۰۰) اختلاف خواهد داشت. از آن‌جا که ۱۸۹۰۰ عددی قابل تقسیم بر ۹ و حاصل این تقسیم برابر ۲۱۰۰ است، بنابراین حسابدار به این موضوع رهنمون می‌شود که به احتمال زیاد اشتباه مربوط به موردی بوده که عدد آن ۲۱۰۰ است و این عدد را ردیابی می‌کند.

همان‌طور که ملاحظه کردید، محاسبات ذهنی می‌تواند به حسابداران در یافتن اشتباهاتشان، که کار وقت‌گیری است، تا حدود زیادی کمک کند که دو مورد مذکور نمونه‌ای از آن بود.

## تمرین‌های فصل اوّل

در حد امکان، سعی کنید مسائل را به‌طور ذهنی پاسخ دهید.

۱ــ حاصل‌ضرب ۴۱ ، ۲۰۰ ، ۳۴ ، ۱,۴۵۶ در ۵۰ را به‌صورت ذهنی محاسبه کنید.

۲ــ حاصل‌ضرب ۸۸ ، ۹۷۲ ، ۳۵۹ ، ۱۴,۷۵۲ در ۲۵۰ را به‌صورت ذهنی محاسبه کنید.

۳ــ حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت ذهنی پاسخ دهید.

۱۹,۰۰۰×۱۹ =　　　　۱,۳۰۰×۱۳۰ =

۱,۸۰۰×۱,۸۰۰ =　　　　۱۷×۱۷۰ =

۴ــ حاصل‌ضرب‌های زیر را به‌صورت ذهنی پاسخ دهید.

۱۵۰,۰۰۰×۱,۵۰۰ =　　　　۳۵×۳۵۰ =

۶۵,۰۰۰×۶۵,۰۰۰ =　　　　۹۵۰۰×۹۵ =

۵ــ این اعداد را بر ۵ تقسیم کنید و پاسخ را به روش ذهنی به‌دست آورید.

۲,۳۵۵　　　　۱۸۰

۲,۰۰۵　　　　۶۷,۵۰۰

۶ــ حاصل تقسیم این اعداد بر ۲۵۰ را به‌صورت ذهنی پیدا کنید.

۳۹,۷۵۰　　　　۴۴,۷۵۰

۷۳۸,۷۵۰　　　　۵,۰۰۰

۷ــ با استفاده از اتّحاد، حاصل‌ضرب‌های زیر را محاسبه کنید.

۹۹۹×۹۹۹ =　　　　۱۰۷×۹۳ =

۳,۹۹۸×۳,۹۹۸ =　　　　۲۰۱×۱۹۹ =

۵,۰۰۳×۵,۰۰۳ =　　　　۱۰,۰۰۱×۱۰,۰۰۱ =

۸ــ کسرهای زیر را ساده کنید :

$\frac{\frac{۱۰۵}{۲۸۰}}{\frac{۳۲۲}{۱۱۲}}$　　$\frac{۱۹۸۰}{۵۹۴۰}$　　$\frac{۳۵۰}{۷۳۵}$　　$\frac{۷۸}{۱۱۴}$

۹ــ عددی به .... قابل قسمت است که به ۲ و .... قابل قسمت باشد.

۱۰ــ عددی به ..... قابل قسمت است که به ۳ و ۴ قابل قسمت باشد.

۱۱ــ عددی به ۱۰ قابل قسمت است که به ۲ و .... قابل قسمت باشد.

۱۲ــ عددی به ۳۳ قابل قسمت است که به .... و ۱۱ قابل قسمت باشد.

۱۳ــ عددی به ۳۹ قابل قسمت است که به .... و ..... قابل قسمت باشد.

۱۴ــ ۲،۵۰۰ واحد از کالایی را با نرخ ۲۵۰ ریال به‌فروش رسانده‌ایم. اگر ۵ درصد از این مبلغ سود باشد، سود حاصله را به‌روش ذهنی محاسبه نمایید.

۱۵ــ با استفاده از اتّحادها حاصل $۹۹۹^۲$ را به‌دست آورید.

۱۶ــ به‌جای a در عدد ۴۵a۲ چه رقم یا ارقامی می‌توان قرار داد تا آن عدد به ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد؟

۱۷ــ شرکتی می‌خواهد تعداد ۵۷۶۲ واحد از تولیدات خود را بین ۱۱ مرکز پخش به‌طور مساوی توزیع نماید. آیا این عمل امکان‌پذیر است؟ اگر نیست چه باید کرد؟

۱۸ــ فرض کنید حسابدار شرکتی به هنگام ثبت فروش نسیه به مبلغ ۴۸۰۰۰ ریال، حساب‌های دریافتنی را ۴۸۰۰۰ ریال بدهکار و فروش را به مبلغ ۴۸۰۰ ریال بستانکار کرده است. این اشتباه چه تأثیری بر مانده‌ی ستون‌های بدهکار و بستانکار تراز آزمایشی دارد و چگونه می‌توان از طریق محاسبات ذهنی این اشتباه را سریع‌تر کشف کرد؟

۱۹ــ در پایان دوره‌ی مالی هنگامی که حسابداران شرکت تراز آزمایشی را تهیه کردند متوجه شدند که جمع ستون بدهکار و بستانکار آن به میزان ۸۷۵۰۰ ریال اختلاف دارد و با این‌که وقت زیادی صرف کرده‌اند تا دلیل این اختلاف را متوجه شوند امّا هنوز به نتیجه نرسیده‌اند. شما چه راهکاری را به آن‌ها پیشنهاد می‌دهید تا سریع‌تر بتوانند این اشتباه را بیابند؟

# فصل دوم

# کاربردهای تسهیم به نسبت

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ ــ انواع نسبت‌های سود و زیانی را محاسبه کند.

۲ ــ مبالغ هزینه را با نسبت‌های مختلف سرشکن کند.

۳ ــ رابطه‌ی درصد و نسبت و انواع موضوعات مربوط به آن را در حسابداری تشخیص دهد.

۴ ــ انواع مسائل مشارکت را حل کند.

۵ ــ تقسیم سود و زیان در شرکت‌های غیرسهامی را با نسبت‌های مختلف انجام دهد.

## ۲ــ کاربردهای تسهیم به نسبت

### ۱ــ۲ انواع نسبت‌های سود و زیانی

محاسبه‌ی نسبت به این دلیل مفید است که رابطه‌ی بین اقلام عمده‌ی صورت‌های مالی، دقّت ریاضی پیدا می‌کند. این نسبت‌ها وقتی بیش‌تر مفهوم پیدا می‌کنند که با سایر نسبت‌ها در دوره‌ی مالیِ قبل همان واحد تجاری (یا با مؤسسات مشابه و یا با استانداردهای مطلوب) مقایسه گردند. مسلّماً سیر تحول روند نسبت‌ها در طول زمان، مثلاً چند سال، در مقام مقایسه با بررسی نسبت‌ها در یک سال معیّن، به مراتب اهمیّت بیش‌تری دارد.

با بررسی دقیق صورت‌های سود و زیان هر مؤسسه، می‌توان اطّلاعات جالبی در مورد کارآیی و مدیریت آن مؤسسه به‌دست آورد. بیش‌تر کسانی که در امور مؤسسه‌ای، از لحاظ سرمایه‌گذاری،

اعتبار یا بازده فعالیت آن، ذی‌نفع یا علاقه‌مند هستند، معمولاً به میزان سود شرکت نسبت به حساب فروش و سرمایه‌گذاری توجّه می‌نمایند.

قبل از پرداختن به بحث نسبت‌ها، بهتر است به اصطلاحات زیر توجّه گردد.

**سود:** به‌طور کلّی مقصود سود خالص است، یعنی سود پس از کسر مالیات.

**فروش:** منظور از فروش، فروش خالص است، یعنی فروش پس از کسر برگشتی‌ها و تخفیفات فروش.

**ارزش ویژه:** کل دارایی‌ها پس از کسر کلّ بدهی‌ها را ارزش ویژه نامند.

**ارزش دفتری دارایی ثابت:** به معنای دارایی ثابت خالص است، یعنی دارایی ثابت پس از کسر استهلاک انباشته.

**سرمایه در گردش:** دارایی جاری پس از کسر بدهی جاری را سرمایه در گردش گویند و حاکی از مبلغی است که می‌توان آن را برای تأمین هزینه‌های روزمره و هم‌چنین برای تهیّه‌ی موادّ اوّلیه و کالا مورد استفاده قرار داد.

## ۲ــ۲ شاخص‌های سودآوری

معمولاً به هر کسری که درصورت آن سود مؤسسه و در مخرج آن فروش، ارزش ویژه[۱]، دارایی ثابت، دارایی‌ها و یا سرمایه در گردش نوشته شده باشد، بازده گویند و آن‌ها را به‌عنوان شاخص سودآوری معرّفی می‌کنند. در این‌جا فقط به پنج مورد بازده اشاره می‌شود: بازده فروش، بازده ارزش ویژه، بازده دارایی ثابت، بازده دارایی‌ها و بازده سرمایه‌ی در گردش.

**۱ــ۲ــ۲ بازده فروش[۲]:** نسبت سود به فروش را بازده فروش می‌نامند.

$$\text{بازده فروش} = \frac{\text{سود}}{\text{فروش}}$$

اگر بخواهیم بازده فروش را برحسب درصد بیان کنیم، فرمول زیر را به‌کار می‌بریم:

$$\text{بازده فروش برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{فروش}} \times ۱۰۰$$

---

۱ــ بدهی − دارایی = ارزش ویژه

۲ــ Return on Sales

این نسبت، نشان می‌دهد که از هر یکصد ریال فروش، چه مقدار سود به‌دست آمده است.

**مثال ۱ــ** فروش شرکتی که در یک سال ۲۰۰ میلیارد ریال و سود آن ۵۰ میلیارد ریال بوده است. بازده فروش و بازده فروش برحسب درصد آن شرکت را محاسبه نمایید:

$$\text{بازده فروش} = \frac{۵۰}{۲۰۰} = ۰/۲۵$$

$$\text{بازده فروش برحسب درصد} = \frac{۵۰}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۲۵$$

**۲ــ۲ــ۲ بازده ارزش ویژه**[1]: بسیاری از تحلیلگران و هم‌چنین اغلب صاحبان سهام یا نمایندگان ایشان، این نسبت را پراهمیت‌تر از دیگر نسبت‌ها می‌دانند؛ زیرا نتیجه‌ای را که از سرمایه‌گذاری آنان به‌دست آمده است نشان می‌دهد. معمولاً ارزش ویژه را در اول دوره‌ی مالی به‌کار می‌برند. زیرا ارزش ویژه در پایان دوره، متأثر از سود یا زیان همان دوره است که نباید محاسبه گردد.

$$\text{بازده ارزش ویژه} = \frac{\text{سود}}{\text{ارزش ویژه‌ی اوّل دوره}}$$

و اگر بخواهیم بازده ارزش ویژه را برحسب درصد بیان کنیم، فرمول زیر را به‌کار می‌بریم:

$$\text{بازده ارزش ویژه برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{ارزش ویژه‌ی اوّل دوره}} \times ۱۰۰$$

**مثال ۲ــ** سود یک شرکت تعاونی ۴۳۲,۰۰۰ ریال و ارزش ویژه‌ی آن شرکت ۲,۴۰۰,۰۰۰ ریال است. بازده ارزش ویژه و بازده ارزش ویژه برحسب درصد آن شرکت تعاونی را محاسبه نمایید.

$$\text{بازده ارزش ویژه} = \frac{۴۳۲,۰۰۰}{۲,۴۰۰,۰۰۰} = ۰/۱۸$$

$$\text{بازده ارزش ویژه برحسب درصد} = \frac{۴۳۲,۰۰۰}{۲,۴۰۰,۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۸$$

**۳ــ۲ــ۲ بازده دارایی ثابت**[2]: از تقسیم سود به دارایی ثابت، بازده دارایی ثابت به‌دست می‌آید. هرگاه کسر به‌دست آمده را در عدد صد ضرب کنیم، درصد بازده دارایی ثابت حاصل می‌شود.

$$\text{بازده دارایی ثابت} = \frac{\text{سود}}{\text{دارایی ثابت}}$$

---

۱ــ Return on Net Worth

۲ــ Return on Fixed Asset

$$\text{بازده دارایی ثابت برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{دارایی ثابت}} \times ۱۰۰$$

**مثال ۳ــ** دارایی ثابت شرکتی ۳۳۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سود آن ۱۶,۵۰۰,۰۰۰ ریال است، بازده دارایی ثابت و بازده دارایی ثابت برحسب درصد آن شرکت را محاسبه نمایید.

$$\text{بازده دارایی ثابت} = \frac{۱۶,۵۰۰,۰۰۰}{۳۳۰,۰۰۰,۰۰۰} = ۰/۰۵$$

$$\text{بازده دارایی ثابت برحسب درصد} = \frac{۱۶,۵۰۰,۰۰۰}{۳۳۰,۰۰۰,۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۵$$

**۴ــ۲ــ۲ بازده کلّ دارایی**[۱]: بسیاری از نظریّه‌پردازان، این نسبت را شاخص نهایی برای تشخیص کفایت و کارآیی مدیریت در اداره‌ی امور مؤسسه می‌دانند. برای محاسبه‌ی این نسبت، می‌توان سود را به کلّ دارایی تقسیم نمود و اگر بخواهیم آن را برحسب درصد محاسبه کنیم، آن نسبت را در ۱۰۰ ضرب می‌نماییم.

$$\text{بازده دارایی} = \frac{\text{سود}}{\text{کل دارایی}}$$

$$\text{بازده دارایی برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{کل دارایی}} \times ۱۰۰$$

**مثال ۴ــ** مؤسسه‌ای در سال گذشته ۴۰ میلیون ریال سود داشته است. اگر کل دارایی آن مؤسسه ۴۰۰ میلیون ریال باشد، بازده دارایی آن مؤسسه و هم‌چنین بازده دارایی آن را برحسب درصد محاسبه کنید.

$$\text{بازده دارایی} = \frac{\text{سود}}{\text{کل دارایی}} = \frac{۴۰}{۴۰۰} = ۰/۱$$

$$\text{بازده دارایی برحسب درصد} = \frac{۴۰}{۴۰۰} = \times ۱۰۰ = ۱۰$$

**۵ــ۲ــ۲ بازده سرمایه در گردش**[۲]: این نسبت برای بستانکاران کوتاه مدت، بسیار حائز اهمیت است. مثلاً اگر یک بانک بخواهد به شرکتی وام کوتاه‌مدت (سه ماهه) پرداخت کند، علاوه بر

---

۱ــ Return on Asset

۲ــ Return on Working Capital

بررسی دیگر نسبت‌ها به این نسبت بیش‌تر توجّه می‌کند. به عبارت دیگر، این نسبت تعیین‌کننده است. برای پیدا کردن بازده سرمایه در گردش کافی‌است سود را به سرمایه‌ی در گردش تقسیم نماییم و اگر بخواهیم آن را برحسب درصد به‌دست آوریم باید نسبت را در ۱۰۰ ضرب کنیم.

$$\text{بازده سرمایه در گردش} = \frac{\text{سود}}{\text{سرمایه در گردش}}$$

$$\text{بازده سرمایه در گردش برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{سرمایه در گردش}} \times ۱۰۰$$

**مثال ۵ــ** سرمایه در گردش شرکتی ۳۶۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سود آن ۲۵,۴۸۰,۰۰۰ ریال است. بازده سرمایه در گردش و بازده سرمایه در گردش برحسب درصد آن شرکت را محاسبه نمایید.

$$\text{بازده سرمایه در گردش} = \frac{۲۵,۴۸۰,۰۰۰}{۳۶۴,۰۰۰,۰۰۰} = ۰/۰۷$$

$$\text{بازده سرمایه در گردش برحسب درصد} = \frac{۲۵,۴۸۰,۰۰۰}{۳۶۴,۰۰۰,۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۷$$

شکّی نیست که تجزیه و تحلیل این نسبت‌های سود و زیانی، تا حدودی می‌تواند وضعیت مؤسسه را مشخص کند؛ امّا برای نتیجه‌گیری بهتر، باید به روند نسبت‌ها نیز توجّه کرد. مثلاً باید نسبت‌های سه سال گذشته را بررسی و تغییرات آن‌ها را تحلیل نمود تا بتوان وضعیّت آیندهٔ مؤسسه را پیش‌بینی کرد. اگر بخواهیم دقّت عمل خود را افزایش دهیم، باید به نسبت‌های سود و زیانی سایر مؤسسات مشابه و به‌خصوص روند آن‌ها در چند سال گذشته، توجّه کنیم. بدیهی است تعیین روندهای بازده فروش و بازده ارزش ویژه در طی دو یا چند سال بسیار اهمیّت دارد. صرفاً این که بدانیم مؤسسه‌ای سود داشته یا زیان برده است، کافی نیست. اگر روندهای مذکور، یعنی روند سود نسبت به فروش یا نسبت به ارزش ویژه در طی چند سال، کاهش را نشان بدهد وضع مؤسسه نامطلوب است، هرچند در طول مدّت سود داشته باشد.

البته نمی‌توان انتظار داشت که در هر حالتی، همه‌ی نسبت‌ها روند مطلوبی را نشان بدهند و این حتی در زمان رونق فروش و افزایش سود هم کم‌تر تحقّق پیدا می‌کند. ممکن است بازده فروش، یعنی نسبت سود به فروش، کاهش را نشان بدهد در حالی که در همان مدّت رابطه‌ی سود به ارزش ویژه افزایش داشته است. به مثال زیر توجّه نمایید.

| شرکت آلفا | سال X۲ | سال X۱ |
|---|---|---|
| | | (ارقام به هزار ریال) |
| فروش | ۶۵۰,۰۰۰ | ۵۰۰,۰۰۰ |
| سود | ۶,۰۰۰ | ۵,۰۰۰ |
| ارزش ویژه | ۵۶,۰۰۰ | ۵۰۰,۰۰۰ |

**نسبت‌ها:**

| | | |
|---|---|---|
| بازده فروش (سود به فروش) | ٪۰/۹ | ٪۱ |
| بازده ارزش ویژه | ٪۱۰/۷ | ٪۱۰ |

مشاهده می‌شود هرچند نسبت بازده فروش کاهش یافته، ولی نسبت بازده ارزش ویژه افزایش داشته است.

علاوه بر موارد فوق باید به تورّم در سال‌های مورد مطالعه توجّه داشت. زیرا تورّم می‌تواند روند نسبت‌ها را به هم بزند، به‌خصوص اگر تورّم حاد باشد.

## ۳ــ۲ نحوه‌ی سرشکن کردن مبالغ هزینه

برای تسهیم کردن هزینه به قسمت‌های مختلف، باید ابتدا ارتباط هزینه‌ها را به قسمت‌های مختلف مشخّص نمود. مثلاً با توجّه به تعداد کارکنان در هر بخش یا به نسبت دستمزد پرداختی به بخش‌های مختلف یا به نسبت ارزش ساختمان و ماشین‌آلات، ساعات کار، مساحت زیر بنا و فروش و بالأخره سود و زیان هریک از بخش‌ها.

**مثال ۶ ــ** شرکتی در سال X۲ ، مبلغ ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال به‌عنوان کمک هزینه‌ی غذای کارکنان هزینه کرده است. اگر در بخش اداری ۴۰ نفر و در مرکز تولیدی A، B و C به ترتیب، ۷۳ ، ۱۵۶ و ۱۳۱ نفر شاغل باشند، هزینه‌ی فوق را به نسبت بخش‌های مختلف تسهیم نمایید.

$$۴۰+۷۳+۱۵۶+۱۳۱=۴۰۰$$

هزینه‌ی بخش اداری $$\frac{۴۰\times ۲,۰۰۰,۰۰۰}{۴۰۰}=۲۰۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی مرکز تولیدی A $$\frac{۷۳\times ۲,۰۰۰,۰۰۰}{۴۰۰}=۳۶۵,۰۰۰$$

هزینه‌ی مرکز تولیدی B $$\frac{۱۵۶\times ۲,۰۰۰,۰۰۰}{۴۰۰}=۷۸۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی مرکز تولیدی C $\frac{131\times 2,000,000}{400}=655,000$

حال اگر این هزینه‌ها را با هم جمع کنیم، باید همان مبلغ ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال حاصل گردد.

$$200,000+365,000+780,000+655,000=2,000,000$$

یادآوری می‌شود اگر بخواهیم حقّ بیمه‌ی تأمین اجتماعی را تسهیم کنیم، باید برحسب جمع دستمزد هر بخش عمل کنیم، یا حقّ بیمه‌ی ساختمان و تأسیسات را برحسب ارزش دفتری هر بخش تسهیم نماییم و یا اجاره‌ی محلّ را برحسب مساحت هر بخش سرشکن کنیم.

## ۴ــ۲ روش‌های تقسیم سود و زیان در شرکت‌های غیر سهامی

امروزه، سرمایه، کار و قبول خطر، سه عامل سازنده‌ی سود در مؤسسات است و هریک از این عوامل، دارای ارزش اقتصادی خاصّی، هستند. سود تضمین شده‌ی سرمایه، حق‌الزحمه‌ی شرکا، پاداش برای مدیران و ارزش قبول خطر، سودی‌است که به سرمایه تعلق می‌گیرد. در شرکت‌های غیر سهامی که سرمایه‌گذاری افراد به صورت‌های متفاوتی است، نحوه‌ی تقسیم سود با به‌کار انداختن عوامل سازنده‌ی سود توسّط هریک از شرکا نیز، متفاوت است. بدیهی است که تقسیم سود با توجّه به میزان سرمایه‌گذاری، صرف وقت در شرکت، تخصص یا حسن شهرت هریک از شرکا، با توافق آنان تعیین می‌گردد. روش‌های مختلف تقسیم سود و زیان به شرح زیر است.

**۱ــ۴ــ۲ تقسیم سود به نسبت ثابت و از قبل تعیین شده:** در این روش، سود حاصله، با توجّه به توافق قبلی به عمل آمده، بین شرکا تقسیم می‌گردد. به طور مثال، چنان‌چه قرار باشد سود حاصله بین شرکا به نسبت ۲، ۳ و ۵ تقسیم گردد و میزان سود ۱۵۰,۰۰۰ ریال باشد سهم هر کدام به‌ترتیب عبارت‌اند از :

مجموع نسبت‌ها $2+3+5=10$

سهم اوّلی $\frac{2\times 150,000}{10}=30,000$

سهم دومی $\frac{3\times 150,000}{10}=45,000$

سهم سومی $\frac{5\times 150,000}{10}=75,000$

در نتیجه $30,000+45,000+75,000=150,000$

**۲ــ۴ــ۲ تقسیم سود به نسبت سرمایه:** در این روش، سود در بین شرکا، به نسبت سرمایه

تقسیم می‌شود. اگر سرمایه‌ی هر یک از شرکا به ترتیب ۲۵۰,۰۰۰، ۳۵۰,۰۰۰ ، ۴۰۰,۰۰۰ ریال و سود حاصل ۴۰,۰۰۰ ریال باشد سهم هریک عبارت است از :

$$۲۵۰,۰۰۰+۳۵۰,۰۰۰+۴۰۰,۰۰۰=۱,۰۰۰,۰۰۰$$

سهم اوّلی $$\frac{۴۰,۰۰۰\times ۲۵۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰}=۱۰,۰۰۰$$

سهم دومی $$\frac{۴۰,۰۰۰\times ۳۵۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰}=۱۴,۰۰۰$$

سهم سومی $$\frac{۴۰,۰۰۰\times ۴۰۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰}=۱۶,۰۰۰$$

جمع سود به‌دست آمده $$۱۰,۰۰۰+۱۴,۰۰۰+۱۶,۰۰۰=۴۰,۰۰۰$$

**۳ــ۴ــ۲ احتساب سود برای سرمایه‌ی شرکا و تقسیم بقیّه‌ی سود به نسبت تعیین شده:** در این روش، شرکا توافق می‌کنند ابتدا برای سرمایه‌ی خود سودی با نرخ مثلاً ۵ درصد نسبت به سرمایه در نظر گرفته شود و سپس مابقی سود به‌طور مساوی یا نسبت‌های معیّن بین آن‌ها تقسیم گردد.

**مثال ۷ ــ** اگر سرمایه‌ی هر یک از شرکا، به ترتیب ۲۵۰,۰۰۰، ۳۵۰,۰۰۰ و ۴۰۰,۰۰۰ ریال باشد، هم‌چنین قرار شده است که برای سرمایه‌ی هر کدام سودی با نرخ پنج درصد نسبت به سرمایه در نظر گرفته شود و مابقی سود به‌طور مساوی بین آن‌ها تقسیم گردد و سود حاصله در سال قبل ۵۶,۰۰۰ ریال باشد سهم هرکدام را مشخص کنید.

$$۲۵۰,۰۰۰+۳۵۰,۰۰۰+۴۰۰,۰۰۰=۱,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۱,۰۰۰,۰۰۰\times ٪۵=۵۰,۰۰۰$$

$$۵۶,۰۰۰-۵۰,۰۰۰=۶,۰۰۰$$

$$۶,۰۰۰\,.\;۳=۲,۰۰۰$$

$$۲۵۰,۰۰۰\times ٪۵=۱۲۵۰۰$$

سهم شریک اوّلی $$۱۲,۵۰۰+۲,۰۰۰=۱۴,۵۰۰$$

$$۳۵۰,۰۰۰\times ٪۵=۱۷,۵۰۰$$

سهم شریک دومی $$۱۷,۵۰۰+۲,۰۰۰=۱۹,۵۰۰$$

$$۴۰۰,۰۰۰\times ٪۵=۲۰,۰۰۰$$

سهم شریک سومی $$۲۰,۰۰۰+۲,۰۰۰=۲۲,۰۰۰$$

جمع سود $$۱۴,۵۰۰+۱۹,۵۰۰+۲۲,۰۰۰=۵۶,۰۰۰$$

**۴ــ۴ــ۲ احتساب حقوق برای هر یک و تقسیم بقیّه‌ی سود به نسبت سرمایه‌ی شرکا:** در این روش، ابتدا حقوق هر یک از شرکا را از کلّ سود کسر و باقی‌مانده‌ی سود را به نسبت سرمایه‌ی ایشان تقسیم می‌کنیم.

**مثال ۸ ــ** با توجّه به مثال ۷، چنان‌چه حقوق نفر اوّل ۱۰۰,۰۰۰ ریال در سال، حقوق دومی ۱۵۰,۰۰۰ ریال در سال و سومی حقوقی نداشته باشد و سود حاصله ۴۵۰,۰۰۰ ریال باشد، در این حالت به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$۱۰۰,۰۰۰+۱۵۰,۰۰۰=۲۵۰,۰۰۰$$

$$۴۵۰,۰۰۰-۲۵۰,۰۰۰=۲۰۰,۰۰۰$$

$$۲۵۰,۰۰۰+۳۵۰,۰۰۰+۴۰۰,۰۰۰=۱,۰۰۰,۰۰۰$$

$$\frac{۲۵۰,۰۰۰\times۲۰۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰}=۵۰,۰۰۰$$

سهم شریک اوّلی $۵۰,۰۰۰+۱۰۰,۰۰۰=۱۵۰,۰۰۰$

$$\frac{۳۵۰,۰۰۰\times۲۰۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰}=۷۰,۰۰۰$$

سهم شریک دومی $۷۰,۰۰۰+۱۵۰,۰۰۰=۲۲۰,۰۰۰$

سهم شریک سومی $\frac{۴۰۰,۰۰۰\times۲۰۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰}=۸۰,۰۰۰$

جمع سود هر سه نفر $۱۵۰,۰۰۰+۲۲۰,۰۰۰+۸۰,۰۰۰=۴۵۰,۰۰۰$

## تمرین‌های فصل دوم

۱ــ شرکت بهار در سال X۲ مبلغ ۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش داشته است. سود آن ۲۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال، ارزش ویژه‌ی آن ۳۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، دارایی ثابت شرکت ۴۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، کلّ دارایی آن ۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و بدهی جاری ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. نسبت‌های بازده سرمایه در گردش، بازده دارایی، بازده دارایی ثابت، بازده ارزش ویژه و بازده فروش آن شرکت درسال قبل را برحسب درصد محاسبه کنید.

۲ــ شرکت بهار در سال X۱ ، مبلغ ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال سود داشته و فروش آن ۱۶۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. اگر بقیّه‌ی اقلام با تمرین ۱ باشد کلیه‌ی نسبت‌های مذکور در تمرین ۱ را مجدّداً

برحسب درصد محاسبه کنید.

۳ــ نسبت‌های تمرین ۱ و ۲ را با هم قیاس کنید.

۴ــ شرکت نور در سال X۲ ، مبلغ ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش داشته و سود آن ۱۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. ارزش ویژه‌ی آن ۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، دارایی ثابت شرکت ۲۵۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، کلّ دارایی ۳۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سرمایه در گردش آن شرکت ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. نسبت‌های پنج‌گانه‌ی این شرکت را محاسبه کنید.

۵ــ اگر در سال X۳ ، سود شرکت نور ۸۰٪ نسبت به سال X۲ افزایش یابد و فروش آن ۵۰٪ افزوده شود، با فرض ثابت ماندن دیگر اقلام، نسبت‌های پنج‌گانه‌ی آن شرکت را محاسبه نمایید.

۶ــ شرکتی در سال X۲ ، مبلغ ۴۵۰,۰۰۰ ریال بابت بیمه‌ی ساختمان کلّیه‌ی کارگاه‌ها پرداخت نموده است. اگر مساحت کارگاه شماره‌ی ۱، ۲۴,۰۰۰ مترمربع، مساحت کارگاه شماره‌ی ۲، ۴۶,۰۰۰ مترمربع و کارگاه شماره‌ی ۳، ۲۰,۰۰۰ مترمربع باشد، مشخص کنید سهم بیمه‌ی هر کارگاه چه مبلغی است؟

۷ــ یک شرکت، ماهیانه ۴,۶۰۰,۰۰۰ ریال اجاره بهای دو انبار، ساختمان اداری و کارگاه پرداخت می‌کند. اگر مساحت هر کدام از انبارها ۶,۰۰۰ مترمربع، ساختمان اداری ۵۰۰ مترمربع و کارگاه ۱۰,۵۰۰ مترمربع باشد، محاسبه کنید سهم اجاره‌ی هر یک از واحدها در یک سال چه مبلغی است؟

۸ــ چهار نفر، با تأسیس یک شرکت، توافق نمودند درصورتی‌که شرکت در پایان سال سودی داشته باشد به نسبت ۴ ، ۵ ، ۵ ، ۶ بین خود تقسیم نمایند. سود شرکت در پایان سال X۲ ، مبلغ ۵۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. سهم سود هرکدام را مشخّص کنید. چنان‌چه لازم است ۲۰٪ از مبلغ سود بابت مالیات کسر شود، سهم هرکدام بابت برگشت سود دریافتی (مالیات) چه مبلغی است و در نهایت سود خالص هرکدام، پس از کسر مالیات، چه مبلغی خواهد شد؟ اگر مالیات ۳۰٪ می‌بود، سهم هریک را، پس از کسر مالیات، محاسبه کنید.

۹ــ حسن، علی و تقی، هرکدام به ترتیب ۶۰۰,۰۰۰ ، ۷۰۰,۰۰۰ ، ۱,۲۰۰,۰۰۰ ریال در شرکتی سرمایه‌گذاری نمودند و در پایان سال X۱ ، سود خالص شرکت ۵۰,۰۰۰ ریال بوده است. اگر قرار باشد به نسبت سرمایه، سود دریافت دارند سهم هرکدام را معیّن کنید. در سال X۲ حسن ۵۰٪ به سرمایه‌ی خود افزود و علی سرمایه خود را به ۹۰۰,۰۰۰ ریال رساند و سود سال X۲ به ۶۰,۰۰۰ ریال افزایش یافت. سهم هرکدام را در سال X۲ محاسبه کنید. سود هریک از شرکا در دو سال، چه مبلغی بوده است؟

نسبت سود به سرمایه‌ی هرکدام را در سال X۱ ، در سال X۲ و در دوسال یک‌جا، محاسبه کنید.

۱۰ــ سه نفر، شرکتی تأسیس کردند و به ترتیب ۷,۰۰۰,۰۰۰ ریال، ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و ۱۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال سرمایه‌گذاری نمودند و مقرّر شد در پایان سال، به هرکدام به نسبت ۸٪ سرمایه، سود تعلق گیرد و در صورتی که باقی‌مانده‌ای داشت به نسبت مساوی بین هرسه نفر تقسیم شود.

الف) اگر سود سال اوّل ۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال باشد، سهم هر کدام را مشخّص کنید.

ب) در صورتی که قرار می‌گذاشتند کل سود را به نسبت سرمایه تقسیم کنند، سهم هریک را محاسبه نمایید.

ج) اگر روش «ب» درنظر گرفته شود، چه کسی بیش‌تر و چه کسی کم‌تر سود خواهد برد؟ چه مبلغ؟

۱۱ــ احمد، اکبر و ابراهیم شرکتی تأسیس و توافق نمودند احمد به طور تمام وقت و اکبر و ابراهیم به‌صورت نیمه وقت در شرکت فعالیت کنند و بابت حقوق ماهیانه مبلغ ۵۰,۰۰۰ ریال برای احمد، ۳۰,۰۰۰ ریال برای اکبر و ۲۰,۰۰۰ ریال برای ابراهیم از محلّ سود سالانه‌ی شرکت منظور گردد. سرمایه‌ی احمد ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال، سرمایه‌ی اکبر ۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سرمایه‌ی ابراهیم ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال است. چنان‌چه در پایان سال ۳,۲۰۰,۰۰۰ ریال سود خالص عاید شرکت شود، سهم هرکدام را از بابت حقوق و سود سرمایه محاسبه کنید.

۱۲ــ دو شرکت، هرکدام با سرمایه‌ی ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال شروع به کار کردند. در پایان سال، اوّلی ۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال و دومی ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال سود داشتند. شرکت اوّلی سود را به نسبت مساوی بین شرکا (سه نفر) تقسیم نمود. شرکت دومی سود خود را به نسبت سرمایه‌ی شرکا تقسیم کرد. (سرمایه‌ی هرکدام به ترتیب ۳,۵۰۰,۰۰۰ ، ۳,۵۰۰,۰۰۰ و ۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است). اگر شرکت دومی سود را به نسبت مساوی بین شرکا تقسیم می‌کرد، تفاوت سود هرکدام از شرکا را محاسبه کنید.

۱۳ــ سود شرکتی بین سه نفر سهامدار آن شرکت به نسبت اعداد ۲ و ۵ و ۷ تقسیم شده است. در صورتی که سهم دومی ۱۲,۰۰۰ ریال بیش‌تر از سهم اوّلی باشد، سهم هرکدام را معیّن کنید.

۱۴ــ با استفاده از ارقام زیر نسبت‌های سودآوری در شرکت آلفا را به‌دست آورید.

ترازنامه ۷۴/۱۲/۲۹ شرکت آلفا (واحد به ریال)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| دارایی جاری | ۲۰۰,۰۰۰ | بدهی جاری | ۱۰۰,۰۰۰ | فروش سال ۷۴ | ۱,۰۰۰,۰۰۰ |
| دارایی ثابت | ۳۰۰,۰۰۰ | بدهی بلندمدت | ۲۵۰,۰۰۰ | سود سال ۷۴ | ۱۰۰,۰۰۰ |
| | | سرمایه | ۱۵۰,۰۰۰ | | |
| جمع دارایی‌ها | ۵۰۰,۰۰۰ | جمع بدهی و سرمایه | ۵۰۰,۰۰۰ | | |

**۱۵ــ** هزینه‌ی مصرف آب فروشگاهی در سال X۳، مبلغ ۸,۴۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. اگر بخواهیم این هزینه را به نسبت مساحت اشغال شده به وسیله‌ی هر قسمت تقسیم نماییم، هزینه‌ی مصرف آب هر قسمت را درصورتی که مساحت اشغال شده توسّط هر قسمت به شرح زیر باشد محاسبه کنید. قسمت فروش ۱,۴۰۰ مترمربع، قسمت انبار ۱,۵۰۰ مترمربع، قسمت رستوران ۷۰۰ مترمربع، قسمت حسابداری۲۰۰ مترمربع، قسمت اداری ۲۰۰مترمربع. اگر هزینه‌ی برق فروشگاه ۱۴,۶۰۰,۰۰۰ ریال باشد، هزینه‌ی برق هر قسمت را نیز محاسبه کنید.

# فصل سوم

## تخفیفات و کارمزدها

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ انواع تخفیفات را در حالات مختلف محاسبه نماید.

۲ــ کارمزدها را در انواع مختلف محاسبه کند.

۳ــ مسائل مختلف انواع قسط‌ها، کارمزد و سود تضمین شده‌ی آن‌ها را محاسبه نماید.

۴ــ انواع قسط‌السنین را محاسبه کند.

۵ــ ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را براساس روش‌های مختلف برآورد نماید.

## ۳ــ تخفیفات و کارمزدها

### مقدمه

معمولاً اعطای تخفیف به خریداران، تعداد خریداران و حجم فروش را افزایش می‌دهد و باعث جذب مشتریان جدید می‌گردد، حتی ممکن است رضایت خاطر همکاران را فراهم آورد و از همه مهم‌تر باعث تسریع در وصول مطالبات و افزایش نقدینگی مؤسسات گردد. بنابراین، تخفیفات به صورت اهرمی قوی در اختیار مدیران مؤسسه قرار گرفته است تا به وسیله‌ی آن بتوانند به اهداف مؤسسه دست یابند.

### ۱ــ۳ انواع تخفیفات

با توجه به اهداف، سیاست‌ها و خط‌مشی‌های هر مؤسسه و شرایط زمانی، تخفیفات خاصّی به

مشتریان داده می‌شود. این تخفیفات بر دو نوع‌اند : یکی تخفیفات تجاری و دیگری تخفیفات نقدی. لازم است یادآوری شود که تخفیفات با برگشت از فروش، کاملاً متفاوت است. زیرا گاهی به عللی، از جمله نقص در کالا، مبلغی به خریدار مسترد می‌گردد یا این‌که کالایی به دلایل گوناگون به کارخانه عودت داده می‌شود و باید بهای آن به مشتری مسترد گردد.

### ۱ــ۱ــ۳ تخفیفات تجاری

**تعریف:** تخفیف تجاری یعنی کاهش قیمت فروش کالا، نسبت به قیمت مصوّب و اعلام شده، که بنا به عللی برای بعضی از مشتریان درنظر گرفته می‌شود. مانند تخفیف به همکاران یا تخفیف به مشاغلی که به نحوی در ارتباط با این کالا هستند (تخفیف شرکت تولید لنت ترمز به شرکت اتومبیل‌سازی از این نوع است) و بالأخره تخفیف به مشتریانی که به‌طور عمده و تجاری کالا را خریداری می‌نمایند. به‌خصوص به شرکت‌هایی که در صادرات کالا به کشورهای دیگر تلاش می‌کنند تخفیف ویژه داده می‌شود.

**مثال ۱ــ** شرکتی، ضمن اعلام قیمت کالاهای خود به خریداران احتمالی، اعلام نموده است که اگر تعداد سفارش کالا بیش از ۱۰۰ واحد و کم‌تر از ۲۰۱ واحد باشد از یک درصد تخفیف و اگر سفارشی از ۲۰۱ واحد تا ۳۵۰ واحد باشد از دو درصد تخفیف و اگر سفارشی از ۳۵۱ واحد تا ۵۰۰ واحد باشد از سه درصد تخفیف و اگر از ۵۰۱ واحد به بالا باشد چهار درصد تخفیف داده می‌شود. هریک از تخفیفات فوق را «تخفیف تجاری» می‌نامند.

**۲ــ۱ــ۳ تخفیفات نقدی:** چنان‌چه در کشوری، وضعیّت تولید به حدی باشد که تولیدکنندگان نیازمند بازاریابی باشند و رقابت تجاری چشم‌گیری بین تولیدکنندگان و توزیع‌کنندگان وجود داشته باشد، معمولاً مؤسسات کالاهای خود را به صورت نسیه به فروش می‌رسانند ؛ یعنی پس از اخذ سفارش، کالا را به مشتری یا توزیع کننده تحویل می‌دهند و در تاریخ معیّنی، که «سررسید بدهی» نامیده می‌شود، نسبت به وصول وجه کالا اقدام می‌نمایند تا خریدار ظرف مدّت مزبور، که معمولاً بین یک تا سه ماه است، بهای کالای خریداری یا خدمت را بپردازد. بدیهی است چنان‌چه خریدار قبل از انقضای زمان توافقی، بهای کالای خریداری یا خدمت را بپردازد به وی تخفیف خاصی داده می‌شود، که این نوع تخفیف را تخفیف نقدی گویند. اگر مدّت زمان پرداخت صورت‌حساب ۳۰ روز تعیین شده باشد، اصطلاحاً به آن «نسیه‌ی ۳۰ روزه» گفته می‌شود و مخفّف آن ن/ ۳۰ است. گاهی مؤسّسات، برای سرعت بخشیدن به وصول مطالبات، تخفیف خاصی را پیش‌نهاد می‌نمایند. مثلاً اگر مهلت پرداخت بدهی ۳۰ روز باشد و مشتری، ظرف ۱۵ روز پرداخت کند از یک درصد تخفیف بهره‌مند می‌گردد و به صورت (ن/ ۳۰ــ۱۵/۱) نشان داده می‌شود که در آن (ن) یعنی نسیه، (۳۰) یعنی ۳۰ روز مهلت بدهی، (۱) یعنی

یک درصد تخفیف و (۱۵) یعنی طول زمان برخورداری از تخفیف از زمان خرید کالا.

**مثال ۲ــ** شرکتی ضمن ارسال فاکتور کالاهای فروخته شده، به خریداران اعلام نموده است اگر قیمت کالا را ظرف مدّت ۵ روز پرداخت نمایند از ۳ درصد تخفیف، و چنان‌چه ظرف مدت ۱۵ روز پرداخت نمایند از ۲ درصد تخفیف و اگر ظرف مدت ۲۵ روز پرداخت نمایند از یک درصد تخفیف بهره‌مند خواهند شد. این نوع تخفیفات را تخفیفات نقدی نامند.

**مثال ۳ــ** فرض کنید مغازه‌داری ۲۵۰ واحد از کالای شرکتِ مثال ۱ را خریداری نموده است. اگر قیمت رسمی اعلام شده‌ی کالا ۴۰۰ ریال باشد، فاکتور مربوط چه مبلغی می‌باشد؟ هم‌چنین، اگر براساس مثال ۲، مدت ۲۴ روز بعد از تاریخ فاکتور، بدهی خود را بپردازد مبلغ پرداختی را تعیین کنید.

| | |
|---|---|
| قیمت رسمی ریال | $۲۵۰ \times ۴۰۰ = ۱۰۰,۰۰۰$ |
| تخفیف تجاری ریال | $۱۰۰,۰۰۰ \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۲,۰۰۰$ |
| مبلغ فاکتور ریال | $۱۰۰,۰۰۰ - ۲,۰۰۰ = ۹۸,۰۰۰$ |
| تخفیف نقدی ریال | $۹۸,۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۹۸۰$ |
| مبلغ پرداختی ریال | $۹۸,۰۰۰ - ۹۸۰ = ۹۷,۰۲۰$ |

## ۲ــ۳ کارمزدها

ابتدا، به تعریف مزد در قانون کار توجّه کنید. مادّه ۳۵ قانون کار، در فصل سوم، مزد را چنین تعریف نموده است:

«مزد عبارت است از وجوه نقدی یا غیرنقدی و یا مجموع آن‌ها که در مقابل انجام کار به کارگر پرداخت می‌شود».

**تبصره ۱ــ** چنان‌چه مزد با ساعات انجام کار مرتبط باشد، «مزد ساعتی» و در صورتی که براساس میزان انجام کار یا محصول تولید شده باشد، «کارمزد» و چنان‌چه براساس محصول تولید شده یا میزان انجام کار در زمان معیّن باشد، «کارمزد ساعتی» نامیده می‌شود. برای پرداخت اجرت کار مناسب، باید به عوامل مختلفی توجّه داشت؛ زیرا پرداخت حدّاقل اجرت کار به منظور سود بیش‌تر ممکن است نتیجه‌ی معکوس داشته باشد. یعنی پرداخت اجرت کم‌تر از معمول امکان دارد کمیّت یا کیفیّت کالا را پایین بیاورد و در نهایت باعث کاهش سود گردد. گاهی مشاهده شده است که با پرداخت

اجرت بالا به کارگر متخصّص و با تجربه، نه تنها کمیّت تولید افزایش یافته، بلکه کیفیّت نیز بهبود یافته است. به هر حال، دقّت در پرداخت اجرت مناسب می‌تواند به کارایی مؤسسه بیفزاید. از جمله عواملی که در انتخاب روش پرداخت باید درنظر گرفت، یکی رضایت نیروی کار، دیگری نوع کار و بالأخره قابلیّت فهم روش پرداخت برای کارگران است. روش‌های پرداخت عبارت‌اند از :

**۱ــ۲ــ۳ پرداخت براساس زمان کار (مزد ساعتی):** در این روش، با کارگر توافق می‌شود که به ازای مثلاً هر یک ساعت کار مبلغ a ریال پرداخت گردد. بنابراین اگر کارگر n ساعت در هفته کار کند و در هر روز، ساعت کار از حدّ معینی (مثلاً ۸ ساعت) بیش‌تر نشود، مبلغ $n \times a$ ریال به وی پرداخت گردد.

مزد ساعتی $= n \times a$

بدیهی است در این روش، انگیزه‌ی خاصی برای تلاش بیش‌تر کارگر ایجاد نمی‌شود.

**۲ــ۲ــ۳ پرداخت کارمزد براساس تعداد تولید:** در این روش، با کارگر توافق می‌شود که به ازای هر واحد تولید مبلغ b ریال به وی پرداخت گردد. بنابراین، اگر کارگر ظرف مدّت معیّنی m واحد کالا تولید نماید، کارمزد او برابر با $m \times b$ ریال خواهد بود.

کارمزد $= m \times b$

واضح است که در این روش کیفیّت کالا ممکن است کاهش یابد، امّا به کمیّت افزوده خواهد شد. برای حل این مشکل، لازم است کالاها را از لحاظ کیفیّت کنترل نمود و اگر کیفیّت از حدّ معیّنی کم‌تر باشد، کالا غیرقابل قبول تلقی می‌شود و باید از تعداد تولید کسر گردد.

**۳ــ۲ــ۳ کارمزد ساعتی:** چنان‌چه پرداخت براساس محصول تولید شده یا میزان انجام کار در زمان معیّن باشد به آن کارمزد ساعتی گویند. به عبارت دیگر کارمزد ساعتی، مزدی است که در مقابل انجام کار مشخّص در زمان مشخّصی پرداخت می‌گردد.

**۴ــ۲ــ۳ پرداخت قسمتی از سود مؤسسه به کارگران:** در این روش، کارگر و کارفرما توافق می‌نمایند که کارمزدها براساس یکی از سه روش قبلی باشد ؛ امّا در پایان سال درصدی از سود کارگاه به نسبت زمان کار هر کارگر یا تعداد تولید هر کارگر یا ... بین ایشان تقسیم گردد. به این طریق، هم کیفیّت و هم کمیّت کالا افزایش می‌یابد. بدیهی است چنان‌چه سود پایان سال به صورت سهام در اختیار کارکنان قرار گیرد و ایشان در سرمایه‌ی کارخانه نیز شریک شوند نتایج بهتری به دنبال خواهد داشت. واضح است که انتخاب هر یک از روش‌های فوق به نوع کار، قدمت کارگاه، تعداد پرسنل هر واحد تولیدی، سود و زیان سنوات قبل و بالأخره سیاست مدیریّت بستگی دارد.

## ۳ــ۳ معامله به صورت قسطی

بسیاری از فروشندگان، برای جذب بیش‌تر مشتریان ترجیح می‌دهند کالاهای خود را به صورت اقساط به فروش برسانند تا هم کالای بیش‌تری فروخته شود و هم سود بیش‌تری عاید آن‌ها گردد. به‌عبارت دیگر، با فروش اقساطی برای مشتریان فاقد قدرت خرید، ایجاد قدرت خرید نمایند. این امر موجب می‌شود که بهای کالای فروش رفته، برای مدّتی نزد خریدار بماند. در این‌حالت باید سود تضمین شده‌ی مربوط را محاسبه نمود و سپس اصل و فرع به‌دست آمده را قسط‌بندی کرد. اگر سود فروشنده را با I، سود تضمین شده‌ی قسط اوّل کل مبلغ اقساط را با K نشان دهیم، پس خواهیم داشت $K = S \times r \times \frac{۱}{۱۲}$ و چنان‌چه پرداخت اقساط، هر دو ماه یک بار باشد به جای $\frac{۱}{۱۲}$ از $\frac{۲}{۱۲}$ استفاده می‌کنیم. هرگاه تعداد اقساط را با N نشان دهیم، فرمول: $I = \frac{K(N+۱)}{۲}$ سود فروشنده را معیّن می‌کند و اگر کلّ مبلغ اقساط را با S نشان دهیم، فرمول $Q = \frac{S+I}{N}$ مبلغ هر قسط را مشخّص می‌کند (Q نشان‌دهنده‌ی مبلغ هر قسط است).

**مثال ۴ــ** شخصی یک رادیو ضبط خرید و مبلغ ۱۰۰,۰۰۰ ریال آن را به طور نقدی پرداخت نمود و مقرر شد باقی‌مانده را به صورت ۸ قسط ۱۵۰,۰۰۰ ریالی در هر ماه پرداخت کند. اگر قیمت فروش نقدی آن ۱,۲۱۰,۰۰۰ ریال باشد، مبلغ سود پرداختی را محاسبه کنید.

$۱۵۰,۰۰۰ \times ۸ = ۱,۲۰۰,۰۰۰$

$۱,۲۰۰,۰۰۰ + ۱۰۰,۰۰۰ = ۱,۳۰۰,۰۰۰$

$۱,۳۰۰,۰۰۰ - ۱,۲۱۰,۰۰۰ = ۹۰,۰۰۰$ سود پرداختی ریال

**مثال ۵ ــ** شخصی تلویزیونی را به مبلغ ۲,۵۰۰,۰۰۰ ریال به اقساط خریده است. به این ترتیب که ۵۰۰,۰۰۰ ریال آن را نقد و بقیه را در شش قسط (ظرف شش ماه) پرداخت نماید. اگر نرخ سود تضمین شده (r) برابر با ۶۰٪ توافق شده باشد و مبلغ ۵۰۰۰ ریال عوارض شهرداری باشد، مبلغ هر قسط را مشخص کنید.

$۲,۵۰۰,۰۰۰ - ۵۰۰,۰۰۰ = ۲,۰۰۰,۰۰۰$ کل مبلغ اقساط

$$K = S \times r \times \frac{۱}{۱۲}$$

$$I = \frac{K(N+۱)}{۲}$$

$$Q=\frac{S+I}{N}$$

$$K = \text{سود تضمین شده‌ی قسط اوّل} = ۲,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۶}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۲} = ۱۰,۰۰۰$$

$$I=\frac{۱۰,۰۰۰(۶+۱)}{۲}=۳۵,۰۰۰$$

$$۳۵,۰۰۰+۵,۰۰۰=۴۰,۰۰۰$$

$$۲,۰۰۰,۰۰۰+۴۰,۰۰۰=۲,۰۴۰,۰۰۰$$

مبلغ هر قسط $۲,۰۴۰,۰۰۰ \div ۶ = ۳۴۰,۰۰۰$

## ۴ــ۳ ارزش فعلی و نهایی سالواره‌های عادی و دائمی

قسط یا سالواره یا قسط‌السنین عبارت است از مبالغ مساوی پول که در فواصل زمانی معین دریافت یا پرداخت می‌شود.

**ارزش نهایی:** عبارت است از حاصل جمع کلّیه‌ی اقساط پرداخت شده و سود آن‌ها در انتهای دوره.

**ارزش فعلی:** شامل مجموع ارزش‌های کنونی یک سری پرداخت‌های مساوی است که در فواصل منظّمی از زمان صورت می‌گیرد.

**قسط‌السنین عادی:** یک سری دریافت یا پرداخت‌های پولی مساوی است که در پایان هر سال پرداخت می‌شود.

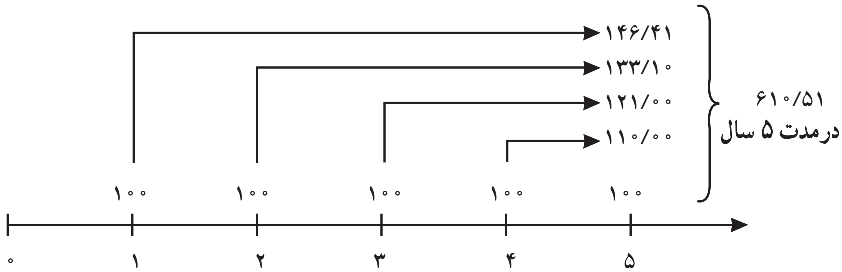
**قسط‌السنین دائمی:** یک سری دریافت یا پرداخت‌های پولی مساوی است که در اول هر سال پرداخت می‌شود.

با توجه به تعاریف فوق، در ادامه با مثال‌هایی نحوه‌ی محاسبه‌ی ارزش فعلی و نهایی سالواره‌های عادی و دائمی توضیح داده می‌شود.

### ۱ــ۴ــ۳ــ ارزش نهایی اقساط مساوی به روش عادی «$FV_A$»

**مثال ۶ــ** فرض کنید به خاطر بدهی که دارید باید در طی ۵ سال، پایان هر سال ۱۰۰ ریال بپردازید. اگر نرخ سود تضمین شده‌ی سالانه برابر ۱۰٪ باشد. ارزش نهایی (آتی) پول‌هایی که طی ۵ سال می‌پردازید چه‌قدر است؟

برای حل این مثال کافی است نمودار این اقساط را ترسیم نماییم.




$$FV_A = ۱۰۰(۱/۱۰)^۴ + ۱۰۰(۱/۱۰)^۳ + ۱۰۰(۱/۱۰)^۲ + ۱۰۰(۱/۱۰)^۱ + ۱۰۰ = ۶۱۰/۵۱$$

از آن‌جا که محاسبات فوق وقت‌گیر است می‌توان از یک فرمول کلی به شرح زیر استفاده نمود. این فرمول ارزش نهایی اقساط مساوی ۱ ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شوند ($FV_A$) را نشان می‌دهد.

$$FV_A = \sum_{t=1}^{N} Pmt_t (1+i)^{N-t} = Pmt \left[ \frac{(1+i)^N - 1}{i} \right]$$

که در آن:

i = نرخ سود تضمین شده ؛

N = تعداد سال‌هایی که طی آن قسط‌ها پرداخت می‌شوند.

و Pmt = بیانگر مبلغ هر قسط است.

**توجه:** در حل مثال‌ها و تمرینات این قسمت، نرخ سود تضمین شده ثابت فرض می‌شود.

در این صورت در مثال فوق داریم که:

$$FV_A = ۱۰۰ \left[ \frac{(۱/۱۰)^۵ - 1}{۰/۱۰} \right] = ۶۱۰/۵۱$$

به دلیل پیچیدگی این فرمول، در این کتاب برای حل تمرین‌ها و مثال‌ها از جدول ارزش نهایی سالواره‌های عادی (جدول ۱) استفاده می‌شود. منظور از سالواره‌های عادی، یک‌سری دریافت یا پرداخت‌های پولی مساوی است که در **پایان** هر سال رخ می‌دهند.

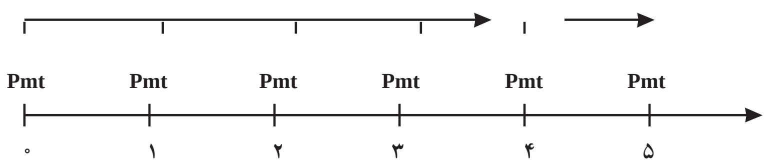
از این‌رو جهت حل مثال ۶ کافی است به جدول ۱ انتهای کتاب مراجعه نمایید. ابتدا نرخ بهره را از روی اعداد بالای ستون‌های جدول پیدا کنید. در مثال ۶، نرخ بهره ۱۰٪ است. بنابراین، در نیمه‌ی پایین وسط صفحه نرخ ۱۰٪ را می‌یابیم. بعد از ستون سمت چپ جدول مقدار n، که بیانگر تعداد سال‌هایی است که اقساط طی آن دریافت یا پرداخت می‌شوند، عدد ۵ را پیدا می‌کنیم. از تلاقی

سطر ۵ = n و ستون ۱۰٪ به عدد ۶/۱۰۵۱۰۰ می‌رسیم که همان $FV_A$ است که اگر آن را در مبلغ هر قسط (که در این مثال ۱۰۰ ریال است) ضرب کنیم ارزش نهایی اقساط به‌دست می‌آید، که برابر ۶۱۰/۵۱ ریال است (که قبلاً نیز به همین جواب رسیده بودیم)........

| n | ۸/۰٪ | ۹/۰٪ | ۱۰/۰٪ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱/۰۰۰۰۰۰ | ۱/۰۰۰۰۰۰ | ۱/۰۰۰۰۰۰ |
| ۲ | ۲/۰۸۰۰۰۰ | ۲/۰۹۰۰۰۰ | ۲/۱۰۰۰۰۰ |
| ۳ | ۳/۲۴۶۴۰۰ | ۳/۲۷۸۱۰۰ | ۳/۳۱۰۰۰۰ |
| ۴ | ۴/۵۰۶۱۱۲ | ۴/۵۷۳۱۲۹ | ۴/۶۴۱۰۰۰ |
| ۵ | ۵/۸۶۶۶۰۱ | ۵/۹۸۴۷۱۱ | $\boxed{۶/۱۰۵۱۰۰}$ |

## ۲ــ۴ــ۳ ارزش نهایی اقساط به روش پرداختنی «$FV_{AD}$»

**مثال ۷ــ** حال فرض کنید در مثال ۶ اگر قرار بود اقساط مذکور را در ابتدای هر سال پرداخت کنید در چنین حالتی مدلِ پرداخت اقساط شما به‌صورت زیر درمی‌آمد.




برای حل این مثال، می‌توان از فرمول کلی زیر استفاده نمود که ارزش نهایی اقساط مساوی ۱ ریالی ($FV_{AD}$) را که در ابتدای هر سال دریافت یا پرداخت می‌شوند، نشان می‌دهد. به این‌گونه اقساط اصطلاحاً سالواره‌های پرداختنی نیز می‌گویند.

$$FV_{AD} = Pmt\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i}\right](1+i)$$

در این فرمول :

$i$ = نرخ سود تضمین شده ؛

$N$ = تعداد سال‌هایی که طی آن قسط‌ها پرداخت می‌شوند ؛

و $Pmt$ = بیانگر مبلغ هر قسط است.

در این صورت برای مثال ۷ داریم :

$$FV_{AD} = ۱۰۰ \left[ \frac{(۱/۱۰)^{۵} - ۱}{۰/۱۰} \right] (۱/۱۰) = ۶۷۱/۵۶$$

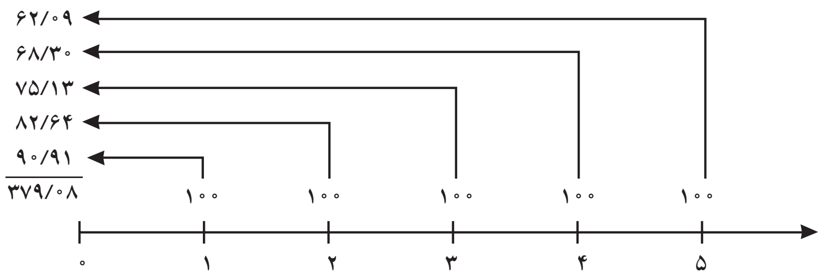
به‌دلیل پیچیدگی فرمول فوق در این کتاب برای حل مثال‌ها و تمرین‌ها از همان جدول ۱ ضمیمه کتاب استفاده می‌شود. فقط کافی است عدد به‌دست‌آمده از جدول (به شرحی که قبلاً گفته شد) را در مبلغ هر قسط و (l+i) ضرب کنید، یعنی

$$۶/۱۰۵۱۰۰ \times ۱۰۰ \times (۱/۱) = ۶۷۱/۵۶۱$$

### ۳ـ۴ـ۳ ارزش فعلی پرداخت اقساط به روش عادی «$PV_A$»:

همان‌طورکه می‌دانید ۱ ریال امروز با ارزش‌تر از یک ریالی است که شما در چند سال بعد خواهید داشت. به عبارت دیگر، اگر شما الآن با ۱۰۰۰ تومان می‌توانید یک ساندویچ بخرید قطعاً ۱۰ سال دیگر این ساندویچ به قیمتی بسیار بیش‌تر از ۱۰۰۰ تومان فروخته می‌شود. این مثال ساده نشان‌دهنده‌ی ارزش زمانی پول است. از این رو شما می‌توانید ۱۰ هزار تومان در حساب بانکی با سود تضمین‌شده سرمایه‌گذاری کنید تا ارزش زمانی پولتان حفظ شود. با توجه به این توضیحات، حال می‌خواهیم ببینیم اگر نرخ سود تضمین شده ۱۰٪ باشد مجموع این ۱۰۰ ریال‌هایی که در پایان هر سال طی ۵ سال می‌پردازیم الآن چه‌قدر ارزش دارند.

$$PV_A = \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۱}} + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۲}} + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۳}} + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۴}} + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۵}} = ۳۷۹/۰۸$$




از آن‌جا که محاسبات فوق وقت‌گیر است، می‌توان از یک فرمول کلی به شرح زیر استفاده نمود. این فرمول ارزش فعلی اقساط مساوی ۱ ریالی را، که در پایان هر سال پرداخت می‌شوند ($PV_A$)، نشان می‌دهد :

$$PV_A = \sum_{t=1}^{N} \frac{Pmt_t}{(1+i)^t} = Pmt \left[ \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i} \right]$$

که در آن :

i = نرخ سود تضمین شده ؛

N = تعداد سال‌هایی که طی آن قسط‌ها پرداخت می‌شوند ؛

و Pmt = بیانگر مبلغ هر قسط است.

در این صورت برای مثال فوق داریم :

$$PV_A = ۱۰۰ \times \left[ \frac{1 - \frac{1}{(۱+۱۰)^{۵}}}{۰/۱۰} \right] = ۳۷۹/۰۸$$

به دلیل پیچیدگی فرمول فوق در این کتاب برای حل تمرین‌ها و مثال‌ها از جدول ارزش فعلی سالواره‌های عادی استفاده می‌شود. منظور از سالواره‌های عادی، یک سری دریافت یا پرداخت‌های پولی مساوی است که در **پایان** هر سال رخ می‌دهند.

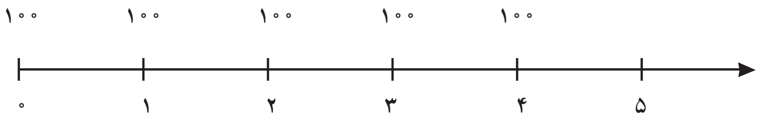
برای حل این مثال، کافی است به جدول ۲ انتهای کتاب مراجعه نمایید. ابتدا نرخ بهره را از روی اعداد بالای ستون‌های جدول پیدا کنید. در مثال ۶، نرخ بهره ۱۰٪ است. بنابراین، در نیمه‌ی پایین وسط صفحه نرخ ۱۰٪ را می‌یابیم بعد از ستون سمت چپ جدول مقدار n ،که بیانگر تعداد سال‌هایی است که اقساط طی آن دریافت یا پرداخت می‌شوند، عدد ۵ را پیدا می‌کنیم. از تلاقی سطر n =۵ و ستون ۱۰٪ به عدد ۳/۷۹۰۷۸۷ می‌رسیم که همان $PV_A$ است، که اگر آن را در مبلغ هر قسط (که در این مثال ۱۰۰ ریال است) ضرب کنیم ارزش فعلی اقساط به‌دست می‌آید که برابر است با ۳۷۹/۰۸ ریال (که قبلاً نیز به همین جواب رسیده بودیم).

| n | ۸/۰٪ | ۹/۰٪ | ۱۰/۰٪ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۹۲۵۹۲۶ | ۰/۹۱۷۴۳۱ | ۰/۹۰۹۰۹۱ |
| ۲ | ۱/۷۸۳۲۶۵ | ۱/۷۵۹۱۱۱ | ۱/۷۳۵۵۳۷ |
| ۳ | ۲/۵۷۷۰۹۷ | ۲/۵۳۱۲۹۵ | ۲/۴۸۶۸۵۲ |
| ۴ | ۳/۳۱۲۱۲۷ | ۳/۲۳۹۷۲۰ | ۳/۱۶۹۸۶۵ |
| ۵ | ۳/۹۹۲۷۱۰ | ۳/۸۸۹۶۵۱ | $\boxed{۳/۷۹۰۷۸۷}$ |

### ۴ــ۴ــ۳ ارزش فعلی پرداخت اقساط به روش پرداختنی «$PV_{AD}$»

**مثال ۸ ــ** حال فرض کنید در مثال قبل شما قرار بود اقساط مذکور را در ابتدای هر سال

پرداخت کنید. در چنین حالتی مدل پرداخت اقساط شما به‌صورت زیر است.




برای این‌که در این حالت بیابید که ارزش فعلی پول‌هایی که طی ۵ سال می پردازید الآن چه قدر است، به محاسبات زیر توجه نمایید.

$$PV_A = ۱۰۰ + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۱}} + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۲}} + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۳}} + \frac{۱۰۰}{(۱/۱۰)^{۴}} = ۴۱۶/۹۸$$

از آن‌جا که محاسبات فوق وقت‌گیر است می‌توان از یک فرمول کلی به شرح زیر استفاده نمود. این فرمول ارزش فعلی اقساط مساوی ۱ ریالی را، که در ابتدای هر سال پرداخت می‌شوند ($PV_{AD}$)، نشان می‌دهد.

$$PV_{AD} = Pmt \left[ \frac{1 - 1/(1+i)^{(N-1)}}{i} \right] + Pmt$$

که در آن:

i = نرخ سود تضمین شده؛

N = تعداد سال‌هایی که طی آن قسط‌ها پرداخت می‌شوند؛

و Pmt = بیانگر مبلغ هر قسط است.

در این صورت برای مثال ۷ داریم:

$$PV_{AD} = ۱۰۰ \left[ \frac{1 - 1/(۱/۱۰)^{(۵-۱)}}{۰/۱۰} \right] + ۱۰۰ = ۴۱۶/۹۸$$

به دلیل پیچیدگی فرمول فوق، برای حل مثال‌ها و تمرین‌ها از جدول ۳ استفاده می‌شود. این جدول ارزش فعلی اقساط مساوی ۱ ریالی را نشان می‌دهد که در ابتدای هر سال دریافت یا پرداخت می‌شوند.

بر این اساس جهت حل مثال ۸، کافی است به جدول ۳ انتهای کتاب مراجعه نمایید. ابتدا نرخ بهره را از روی اعداد بالای ستون‌های جدول پیدا کنید. در مثال ۶، نرخ بهره ۱۰٪ است. بنابراین،

در نیمه‌ی پایین وسط صفحه نرخ ۱۰٪ را می‌یابیم. بعد از ستون سمت چپ جدول مقدار n که بیانگر تعداد سال‌هایی است که اقساط طی آن دریافت یا پرداخت می‌شوند، عدد ۵ را پیدا می‌کنیم. از تلاقی سطر ۵ = n و ستون ۱۰٪ به عدد ۴/۱۶۹۸۶۵ می‌رسیم که همان $PV_{AD}$ است، که اگر آن را در مبلغ هر قسط (که در این مثال ۱۰۰ ریال است) ضرب کنیم ارزش فعلی اقساط به‌دست می‌آید که برابر است با ۴۱۶/۹۸ ریال که قبلاً نیز به همین جواب رسیده بودیم.

| n | ۸/۰٪ | ۹/۰٪ | ۱۰/۰٪ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱/۰۰۰۰۰۰ | ۱/۰۰۰۰۰۰ | ۱/۰۰۰۰۰۰ |
| ۲ | ۱/۹۲۵۹۲۶ | ۱/۹۱۷۴۳۱ | ۱/۹۰۹۰۹۱ |
| ۳ | ۲/۷۸۳۲۶۵ | ۲/۷۵۹۱۱۱ | ۲/۷۳۵۵۸۷ |
| ۴ | ۳/۵۷۷۰۹۷ | ۳/۵۳۱۲۹۵ | ۳/۴۸۶۸۵۲ |
| ۵ | ۴/۳۱۲۱۲۷ | ۴/۲۳۹۷۲۰ | $\boxed{۴/۱۶۹۸۶۵}$ |

## ۵ــ۳ نحوه‌ی برآورد ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول

همان‌طوری که قبلاً ذکر شد، فروش بیش‌تر مؤسسات تجاری به صورت نسیه است. زیرا فروش به طور نسیه باعث افزایش میزان فروش می‌شود. ولی گاهی به دلایل مختلف از جمله ورشکستگی، فوت و یا ... ممکن است بعضی از خریداران نسیه، قادر به پرداخت قسمتی یا تمام بدهی خود نباشند. بنابراین، هر مؤسّسه‌ی تجاری که فروش به صورت غیرنقدی و اقساطی دارد باید پیش‌بینی کند که قسمتی از مطالباتش ممکن است در آینده وصول نشود. به همین دلیل باید حسابی به نام ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول افتتاح نماید. این حساب در پایان سال مالی، به صورت کاهش‌دهنده‌ی حساب‌های دریافتنی در ترازنامه عمل می‌کند. هم‌چنین به صورت هزینه در حساب سود و زیان منظور می‌گردد، که باعث کاهش سود یا افزایش زیان خواهد شد. اگرچه برآورد مبلغ مطالبات مشکوک‌الوصول به نظر مدیریت بستگی دارد ولی روش‌هایی برای تخمین این مبالغ وجود دارد که می‌تواند برای مؤسسه راهنما باشد. این روش‌ها عبارت‌اند از :

**۱ــ۵ــ۳ روش حذف مستقیم (روش اوّل):** اگر مدیریت پیش‌بینی کند که بعضی از مطالبات قابل وصول نباشد آن را از حساب‌های دریافتنی حذف می‌کند. مثلاً ممکن است مدیریت، به علت ورشکستگی یکی از خریداران یا تأخیر بسیار طولانی در پرداخت تصمیم بگیرد تمام یا قسمتی از بدهی

وی را از دفاتر حذف کند. البته این روش چندان مناسب نیست و کم‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

**۲ــ ۵ ــ۳ روش بــرآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای درصدی از فروش (روش دوم):** اگر رقم فروش نقدی بسیار پایین باشد یا درصد ثابتی از کلّ فروش باشد، می‌توان از این روش استفاده نمود. در این روش با توجّه به تجربیّات گذشته و وضعیّت اقتصادی منطقه و مشتریان، ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول معادل درصد معیّنی از فروش تعیین می‌گردد.

**مثال۹ــ** یک شرکت بازرگانی سالیانه ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش دارد که حدود ۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال آن نقدی است (همه ساله حدود ۳۰٪ فروش نقدی و مابقی فروش نسیه است). اگر ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول، حدود ۲ درصد کلّ فروش پیش‌بینی شده باشد مبلغ آن را مشخص کنید.

میزان ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول $۱۰,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۲۰۰,۰۰۰$

**۳ــ۵ ــ۳ روش برآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای درصدی از فروش‌های نسیه (روش سوم):** در این روش، که نسبت به روش‌های قبلی دقیق‌تر است، برآورد ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای درصدی از فروش‌های نسیه است؛ زیرا اصولاً فروش‌های نقدی تأثیری در ذخیره‌های مطالبات مشکوک‌الوصول ندارد. در این روش نیز براساس تجربیّات گذشته، شرکت‌های مشابه، وضعیّت خریداران و وضعیت اقتصادی منطقه و مشتریان، درصدی از فروش نسیه به صورت ذخیره مطالبات مشکوک‌الوصول پیش‌بینی می‌گردد.

**مثال ۱۰ــ** اگر در شرکت مثال ۹، ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول حدود ۲/۵ درصد فروش‌های نسیه پیش‌بینی شده باشد، مبلغ آن را مشخص کنید.

فروش نسیه $۱۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۳,۰۰۰,۰۰۰ = ۷,۰۰۰,۰۰۰$

$$۷,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۲/۵}{۱۰۰} = ۱۷۵,۰۰۰$$

**۴ــ۵ ــ۳ برآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای درصدی از مانده‌ی حساب‌های دریافتنی (روش چهارم):** به عقیده‌ی بعضی از صاحب‌نظران، این برآورد دقیق‌ترینِ روش‌هاست؛ زیرا اصولاً خیلی از خریداران، بدهی خود را به موقع پرداخت می‌نمایند و تعداد کمی هستند که در پرداخت خود تأخیر دارند و روشن است از بین کسانی که تأخیر در پرداخت دارند، معدودی بدهی خود را نمی‌پردازند. برای روشن‌تر شدن موضوع به مثال زیر توجّه کنید.

**مثال ۱۱ــ** شرکتی، سالیانه ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش دارد که ۴۰٪ به صورت نقدی و مابقی به صورت نسیه است. مانده‌ی حساب‌های دریافتنی شرکت ۵۰,۰۰۰ ریال است. مدیر فروش معتقد به

روش دوم با برآورد ۳ درصد است. معاون بازرگانی شرکت، روش سوم را با برآورد ۲ درصد می‌پسندد و بالأخره مدیر عامل معتقد به روش چهارم با برآورد ۲۵ درصد است. با توجّه به نظرات هر کدام، ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول شرکت را محاسبه کنید.

فروش نقدی $۱,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۴۰۰,۰۰۰$

فروش نسیه $۱,۰۰۰,۰۰۰ - ۴۰۰,۰۰۰ = ۶۰۰,۰۰۰$

روش دوم: میزان‌مطالبات مشکوک‌الوصول براساس‌نظر مدیر فروش

$$۱,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۳}{۱۰۰} = ۳۰,۰۰۰$$

روش سوم: میزان مطالبات مشکوک‌الوصول براساس نظر معاون بازرگانی

$$۶۰۰,۰۰۰ \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۱۲,۰۰۰$$

روش چهارم: میزان مطالبات مشکوک‌الوصول براساس نظر مدیر عامل

$$۵۰,۰۰۰ \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۱۲,۵۰۰$$

البته روش‌های عملی‌تری نیز وجود دارد که از بحث این کتاب خارج است. برای مثال در بعضی از مؤسّسات، با توجّه به قِدمت حساب‌های دریافتنی، آن‌ها را تفکیک و به صورت یک ماهه، سه ماهه، شش‌ماهه، یک‌ساله، دوساله و بیش‌تر دسته‌بندی می‌کنند و درصد بالایی به نسبت قدمت هر کدام پیش‌بینی می‌نمایند. مثلاً ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را یک‌ماهه، یک‌درصد، سه‌ماهه، پنج درصد، شش‌ماهه، ده درصد، یک‌ساله، بیست و پنج درصد و بالأخره دوساله پنجاه درصد برآورد می‌نمایند.

## تمرین‌های فصل سوم

۱ــ قیمت هر واحد کالایی ۳۰۰ ریال است. اگر از ۱۰۱ تا ۳۰۰ واحد خریداری شود، ۲ درصد تخفیف و اگر از ۳۰۱ تا ۵۰۰ واحد خریداری گردد ۵درصد تخفیف و برای بیش از ۵۰۱ واحد خرید،۸ درصد تخفیف داده می‌شود. صورت حساب این شرکت باید حدّاکثر ظرف یک ماه پرداخت گردد. ولی اگر در کم‌تر از ده روز پرداخت شود ۳ درصد تخفیف و چنان‌چه در کمتر از ۲۰ روز پرداخت شود ۱ درصد تخفیف منظور خواهد شد. حال اگر شخصی ۱۵۶ واحد خریداری کند و بهای آن‌ها را بخواهد ظرف ۴ روز پرداخت کند، چه مبلغی را باید بپردازد؟ اگر ۴۰۰ واحد خریداری کرده باشد و بخواهد ظرف پانزده روز پرداخت نماید، چه مبلغی را باید بپردازد؟

۲ــ کارگری روزانه ۸ساعت کار می‌کند و ۳واحد از کالایی را تولید می‌نماید. اگر دستمزد او ساعتی ۲۰,۰۰۰ ریال باشد یا قبول کند که در ازای هر واحد تولید کالا ۵۰,۰۰۰ ریال دریافت نماید، کدام روش به صلاح کارفرماست؟ پرداخت براساس ساعت کار یا پرداخت براساس واحدهای تولید شده؟ چرا؟ اگر روش پیشنهادی شما عملی شود چه محسّنات و چه معایبی به‌دنبال خواهد داشت؟ توضیح دهید.

۳ــ برای کارخانه‌ای، دستگاهی خریداری شده که قیمت نقد آن ۲۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال تعیین گردیده است. اگر کارخانه ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال از بهای نقد آن را به صورت پیش‌قسط و بقیّه را در ۲ سال با اقساط متساوی و متوالی ماهانه با نرخ ۱۲٪ پرداخت نماید، مبلغ هر قسط را معیّن کنید. چنان‌چه اقساط دوماه یک‌بار پرداخت گردد مبلغ هر قسط را محاسبه نمایید.

۴ــ یک شرکت، شرایط فروش کامیون‌های تولیدی خود را به این شرح اعلام نموده است :

قیمت نقد ۶۴,۲۰۰,۰۰۰

ولی به صورت اقساط نیز می‌توان کامیون را خریداری کرد. در این صورت $\frac{۱}{۳}$ مبلغ را به‌طور نقدی و مابقی را به مدت ۲ سال با نرخ بهره ۱۵٪ به صورت اقساط ماهیانه دریافت می‌دارد.

اوّلاً، مبلغ هر قسط را معیّن کنید.

ثانیاً، اگر پیش‌قسط را به $\frac{۱}{۴}$ مبلغ نقد کاهش و مدّت بازپرداخت اقساط را به ۳ سال افزایش دهد، مبلغ هر قسط کم‌تر می‌شود یا بیش‌تر؟ چه قدر؟

۵ــ فروشگاهی، یک دستگاه تلویزیون را با دریافت ۱۰ درصد قیمت به صورت نقدی و بقیّه را به صورت اقساط ۱۸ ماهه فروخت و مقرّر شد که با نرخ ۸ درصد در سال سود تضمین شده بگیرد. اگر

۴۸,۰۰۰ ریال عوارض شهرداری به قیمت فروش افزوده شود و قیمت نقدی تلویزیون ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال باشد مبلغ هر قسط را مشخّص کنید.

۶ــ فروشگاهی، یخچالی را با مبلغ ۶۰۰,۰۰۰ ریال نقد و ده قسط ۲۳۰,۰۰۰ ریالی فروخت. اگر عوارض شهرداری این یخچال ۳۰,۰۰۰ ریال و قیمت نقدی آن ۲,۶۰۰,۰۰۰ ریال باشد، مبلغ سود تضمین شده در این معامله را محاسبه کنید.

۷ــ هرگاه دارنده‌ی سفته‌ای به مبلغ ۴۰۰,۰۰۰ ریال موافقت نماید که بدهکار وجه آن را به اقساطِ مساوی ماهانه در ۲ سال بازپرداخت کند و نرخ بهره ۶٪ باشد،

الف) مبلغ هر قسط را مشخص نمایید.

ب) بدهکار تا پایان دوره، چه مبلغی بیش از مبلغ سفته پرداخت خواهد نمود؟ (اوّلین قسط یک ماه بعد از سررسید سفته پرداخت می‌گردد).

۸ــ قیمت اتومبیلی ۸۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال است. فروشنده حاضر است ۵۰ درصد قیمت را نقدی و مابقی را به صورت اقساط ماهیانه ظرف یک سال دریافت نماید. اگر نرخ سود تضمین شده ۱۰ درصد باشد، اقساط اتومبیل را محاسبه کنید.

۹ــ قیمت نقدی تلویزیونی ۴,۲۰۰,۰۰۰ ریال است. به دو روش می‌توانیم برای خرید آن اقدام کنیم :

الف) مبلغ ۴,۲۰۰,۰۰۰ ریال از بانکی با بهره ۱۸٪ دریافت و در ۱۲ قسط پرداخت نماییم.

ب) بنابر اعلام فروشگاه قیمت قسطی این تلویزیون ۴,۸۰۰,۰۰۰ ریال در ۱۲ قسط مساوی است.

انتخاب کدام روش در خرید این تلویزیون، برای ما باصرفه‌تر است؟ چه‌قدر؟

۱۰ــ ارزش نهایی اقساط ۵۰۰ ریالی را، که طی ۴ سال با نرخ سود تضمینی ۴٪ پرداخت می‌شوند، در دو حالت زیر با استفاده از جدول ضمیمه‌ی کتاب محاسبه نمایید :

الف) اقساط در انتهای هر سال پرداخت شوند.

ب) اقساط در ابتدای هر سال پرداخت شوند.

۱۱ــ شخصی می‌خواهد با سپرده‌گذاری در بانک بعد از ۵ سال ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال در حساب خود داشته باشد، اگر نرخ سود تضمین شده ۱۸٪ باشد و قرار باشد که مشتری در ابتدای هر سال مبلغی را به حساب واریز کند این مبلغ را محاسبه کنید.

۱۲ــ حامد و زیبا به تازگی صاحب فرزندی شده‌اند. آن‌ها تصمیم گرفته‌اند تا یک حساب بانکی با نرخ سود تضمین شده‌ی ۱۸٪ برای فرزندشان افتتاح کنند و در انتهای هر سال مبلغی پول به این حساب واریز کنند، به نحوی که بعد از ۲۰ سال فرزندشان ۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال در حسابش داشته باشد. مقدار پولی را که این پدر و مادر هر سال باید به حساب فرزندشان واریز کنند، حساب کنید.

۱۳ــ ارزش فعلی اقساط ۵۰۰ ریالی را، که طی ۴ سال با نرخ سود تضمینی ۴٪ پرداخت می‌شوند، در دو حالت زیر با استفاده از جدول ضمیمه کتاب محاسبه نمایید :

الف) اقساط در انتهای هر سال پرداخت شوند.

ب) اقساط در ابتدای هر سال پرداخت شوند.

۱۴ــ حمید قصد دارد اتومبیلی به قیمت ۸۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال را به‌صورت قسطی طی ۱۰ قسط مساوی که پایان هر سال پرداخت می‌شود، بخرد. اگر نرخ سود تضمین شده ۱۰٪ باشد، مبلغ هر قسط را حساب کنید.

۱۵ــ مینا فرشی بافته است که ارزش آن هم اکنون ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال است. فردی حاضر شده است که فرش را به همین قیمت امّا به‌طور قسطی بخرد. اگر نرخ سود تضمین شده ۱۶٪ باشد و خریدار بخواهد طی ۵ سال در ابتدای هر سال هر قسط خود را بپردازد، مینا باید مبلغ هر قسط را چه‌قدر تعیین کند؟

۱۶ــ شرکتی در سال گذشته ۸,۰۰۰ ریال فروش داشته، که ۵۰٪ آن به صورت نقدی و مابقی به صورت نسیه بوده است. مانده حساب‌های دریافتنی شرکت ۳۵۰۰ ریال بوده است.

الف) ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را با روش برآورد مطالبات مشکوک الوصول بر مبنای ۴ درصد از فروش محاسبه نمایید.

ب) ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را با روش برآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای ۳ درصد از فروش‌های نسیه محاسبه کنید.

ج) ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را با روش برآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای ۱۰ درصد از مانده‌ی حساب‌های دریافتنی محاسبه نمایید.

د) به نظر شما، کدام یک از روش‌های فوق منطقی‌تر است؟

هـ) به نظر شما، کدام یک از روش‌های فوق به نفع این شرکت است؟

# فصل چهارم

## محاسبات استهلاک دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ استهلاک را تعریف کند.

۲ــ منظور از هزینه‌ی استهلاک را بیان کند.

۳ــ استهلاک دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت را به‌روش‌های مختلف محاسبه نماید.

## ۴ــ محاسبات استهلاک دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت

### مقدمه

اصولاً هر مؤسّسه‌ای از خدمات دارایی‌های بلندمدّت یا دارایی ثابت خود، که ممکن است خرید آن مربوط به‌چند سال قبل باشد، بهره می‌گیرد. مثل خرید یک دستگاه وانت که چند سال قبل خریداری شده است و هم‌اکنون نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، برای این‌که عملکرد مؤسّسه را در یک دوره‌ی معیّن مشخص کنیم لازم است کاهش ارزش ناشی از فرسودگی دارایی‌های بلندمدّت یا دارایی ثابت به صورت هزینه منظور گردد. این نوع هزینه را که پرداخت نقدی در دوره‌ی فعلی ندارد، هزینه‌ی استهلاک گویند. استهلاک هر دارایی به‌مقدار خدمتی که به‌مؤسّسه می‌دهد، یا به مدّت زمانی که از شروع به‌کار آن می‌گذرد، هم‌چنین به عمر مفید و بالأخره به ارزش اسقاطی آن بستگی دارد.

### ۱ــ۴ تعاریف استهلاک

قانون تجارت، پایین آمدن ارزش دارایی‌های بلندمدّت یا دارایی‌های ثابت را که در نتیجه

استعمال، تغییرات فنّی یا علل دیگر حادث شود، موجب استهلاک دانسته است. قانون مالیات‌های مستقیم، آن قسمت از دارایی‌های ثابت را، که بر اثر استعمال یا گذشت زمان یا سایر عوامل بدون توجّه به تغییر قیمت‌ها تقلیل ارزش می‌یابد، قابل‌استهلاک تشخیص داده است.

در حسابداری، سرشکن کردن و تخصیص دادن بهای تمام شده‌ی دارایی‌های ثابت یا بلندمدّت به طریقی معقول و منظّم را بردوره‌های استفاده از آن استهلاک می‌نامند. بهای تمام شده، معمولاً در طول مدّت استفاده از دارایی ثابت می‌ماند. به‌طوری که در پایان عمر مفید دارایی، مجموع اقلام استهلاک دوره‌های استفاده از آن برابر می‌شود با بهای اوّلیه، منهای ارزشی که برای دارایی اسقاط در نظر گرفته شده است.

**تعریف استهلاک:** تقلیل تدریجی ارزش دارایی‌های بلندمدت یا دارایی‌های ثابت را به‌علت فرسودگی و منسوخ شدن، استهلاک گویند. در شرایط عادی و به‌طور معمول، می‌توان اذعان کرد که هر دارایی پس از مدّتی (اعمّ از این‌که مورد استفاده قرار گرفته یا نگرفته باشد) مستهلک می‌شود و مقداری از ارزش خود را از دست می‌دهد. تفاوت قیمت تمام شده‌ی دارایی با ارزش اسقاط آن باید به‌شکلی بر دوره‌ی استفاده از آن تقسیم شود و به‌حساب هزینه‌ی استهلاک منظور گردد. برای محاسبه‌ی استهلاک، روش‌های مختلفی وجود دارد که به برخی از این روش‌ها اشاره می‌گردد. بدیهی است هیچ یک از روش‌های محاسبه‌ی استهلاک، هزینه‌ی دقیق و قطعی دارایی را در هر سال معیّن نمی‌کند، بلکه هزینه‌ی تقریبی آن را در سال محاسبه می‌نماید. این روش‌ها عبارت‌اند از :

ــ محاسبه‌ی استهلاک به روش خط مستقیم

ــ محاسبه‌ی استهلاک به روش مجموع سنوات

ــ محاسبه‌ی استهلاک به روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف

## ۲ــ۴ محاسبه‌ی استهلاک به روش خط مستقیم

اکثر مؤسّسات، به‌دلیل سهولت، از این روش استفاده می‌نمایند. در این روش، ارزش اسقاطی دستگاه از قیمت خرید آن کسر و بر تعداد سال‌های تقریبی عمر مفید آن تقسیم می‌شود تا هزینه‌ی استهلاک یک سال تعیین گردد. اگر فرض کنیم دستگاهی به مبلغ a ریال خریداری شده است و پس از n سال مستهلک گردد و ارزش اسقاطی یا قراضه‌ی آن b ریال برآورد شده باشد و c هزینه‌ی استهلاک هر سال باشد، استهلاک سالانه دستگاه عبارت‌اند از :

هزینه‌ی استهلاک $= c_k$

بهای تمام شده = c

ارزش اسقاط = s

عمر مفید = n

$$c_k = \frac{c-s}{n}$$

**مثال ۱ ــ** دستگاه تراشی به‌مبلغ ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری شده و پیش‌بینی شده است که بعد از ۱۰ سال کار، ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال ارزش داشته باشد. هزینه‌ی استهلاک سالانه‌ی آن را به‌روش خطّ مستقیم محاسبه کنید. $c_K = \frac{(۲۰,۰۰۰,۰۰۰-۴,۰۰۰,۰۰۰)}{۱۰} = ۱,۶۰۰,۰۰۰$ واضح است که اگر بعد از ۶ سال، دستگاه تراش تعمیر اساسی شود و مبلغ ۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال هزینه‌ی تعمیر آن گردد، هزینه‌ی استهلاک آن از سال هفتم به‌بعد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود :

| | | |
|---|---|---|
| هزینه‌ی استهلاک شش سال | ریال | $۱,۶۰۰,۰۰۰ \times ۶ = ۹,۶۰۰,۰۰۰$ |
| ارزش دفتری دستگاه | ریال | $۲۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۹,۶۰۰,۰۰۰ = ۱۰,۴۰۰,۰۰۰$ |
| ارزش دفتری بعد از تعمیر | ریال | $۱۰,۴۰۰,۰۰۰ + ۶,۰۰۰,۰۰۰ = ۱۶,۴۰۰,۰۰۰$ |
| ارزش دفتری منهای ارزش اسقاط | ریال | $۱۶,۴۰۰,۰۰۰ - ۴,۰۰۰,۰۰۰ = ۱۲,۴۰۰,۰۰۰$ |
| هزینه‌ی استهلاک سالانه از سال هفتم | ریال | $۱۲,۴۰۰,۰۰۰ \div ۴ = ۳,۱۰۰,۰۰۰$ |

بدیهی است در صورتی که تعمیر اساسی توانسته باشد چهار سال به‌عمر مفید دستگاه بیفزاید و قیمت قراضه‌ی آن ۴,۴۰۰,۰۰۰ ریال تخمین زده شود، استهلاک را به‌این صورت محاسبه می‌کنیم :

$$۱۶,۴۰۰,۰۰۰ - ۴,۴۰۰,۰۰۰ = ۱۲,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۴ + ۴ = ۸$$

هزینه‌ی استهلاک سالانه از سال هفتم به‌بعد ریال $۱۲,۰۰۰,۰۰۰ \div ۸ = ۱,۵۰۰,۰۰۰$

## ۳ــ۴ محاسبه‌ی استهلاک به روش مجموع سنوات

همان‌گونه که می‌دانیم، معمولاً کاهش قیمت یک دارایی در سال‌های ابتدایی خرید بسیار بیش‌تر از سال‌های پایانی آن است. مثلاً قیمت یک دستگاه جرّاثقال پس از یک سال کار، تقریباً ۲۵٪ کاهش می‌یابد. در صورتی که در سال‌های هفتم و هشتم کم‌تر از ۵٪ از قیمت آن کم می‌شود. بنابراین، روش خطّ مستقیم اگر چه ساده است، ولی واقعی نیست. به‌همین دلیل می‌توان از روش مجموع سنوات، که به‌واقعیّت نزدیک‌تر است، استفاده نمود. نرخ استهلاک در این روش، از تقسیم

سال‌های باقی‌مانده‌ی عمر مفید دستگاه برمجموع ارقام سنوات آن به‌دست می‌آید.

**مثال ۲ــ** عمر مفید دستگاهی ۶ سال است، نرخ استهلاک هر سال آن را پیدا کنید.

مجموع سنوات $۱+۲+۳+۴+۵+۶=۲۱$

$\frac{۶}{۲۱}$ نرخ استهلاک سال اوّل

$\frac{۵}{۲۱}$ نرخ استهلاک سال دوم

$\frac{۴}{۲۱}$ نرخ استهلاک سال سوم

$\frac{۳}{۲۱}$ نرخ استهلاک سال چهارم

$\frac{۲}{۲۱}$ نرخ استهلاک سال پنجم

$\frac{۱}{۲۱}$ نرخ استهلاک سال ششم

برای سهولت می‌توان از فرمول

$$C_K = \frac{۲(n-K+۱)(a-b)}{n(n+۱)}$$

استفاده نمود که در آن a، قیمت خرید دارایی با هزینه‌ی نصب و راه‌اندازی، b، قیمت قراضه‌ی دارایی، n، سال‌های عمر مفید دارایی و K، سالی است که قرار است هزینه‌ی استهلاک آن تعیین شود و بالأخره C، هزینه‌ی استهلاک سال مورد نظر است.

**مثال ۳ــ** شرکتی، یک دستگاه اتوبوس به مبلغ ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری نموده و پیش‌بینی کرده است که این اتوبوس ۷ سال عمر مفید خواهد داشت و آن‌گاه به‌مبلغ ۸۰۰,۰۰۰ ریال به‌فروش برسد. هزینه‌ی استهلاک سالانه‌ی اتوبوس را به روش مجموع سنوات محاسبه نمایید.

هزینه‌ی استهلاک سال اوّل ریال $C_۱ = \frac{۲(۷-۱+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۱,۰۵۰,۰۰۰$

هزینه‌ی استهلاک سال دوم ریال $C_۲ = \frac{۲(۷-۲+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۹۰۰,۰۰۰$

هزینه‌ی استهلاک سال سوم ریال $C_۳ = \frac{۲(۷-۳+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۷۵۰,۰۰۰$

هزینه‌ی استهلاک سال چهارم ریال $C_۴ = \frac{۲(۷-۴+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۶۰۰,۰۰۰$

$$C_{۵} = \frac{۲(۷-۵+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۴۵۰,۰۰۰$$ هزینه‌ی استهلاک سال پنجم ریال

$$C_{۶} = \frac{۲(۷-۶+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۳۰۰,۰۰۰$$ هزینه‌ی استهلاک سال ششم ریال

$$C_{۷} = \frac{۲(۷-۷+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۱۵۰,۰۰۰$$ هزینه‌ی استهلاک سال هفتم ریال

بدیهی است $\sum_{i=۱}^{k} C_i$ برابر با ۴,۲۰۰,۰۰۰ ریال خواهد بود.

## ۴ــ۴ محاسبه‌ی استهلاک به روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف

قبل از بیان این روش به مثال زیر توجّه کنید.

**مثال۴ ــ** مؤسّسه‌ای یک دستگاه موتورسیکلت به مبلغ ۸۰۰,۰۰۰ ریال برای نامه‌رسان خود خریداری نموده و پیش‌بینی کرده است که بعد از ۴ سال این وسیله را به قیمت ۳۰,۰۰۰ ریال به‌فروش رساند. هزینه‌ی استهلاک سال‌های مزبور را به طریق مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف محاسبه نمایید.

چون عمر مفید دستگاه ۴ سال است، پس نرخ استهلاک به روش خطّ مستقیم ۲۵٪ است، ولی در این‌جا به نرخ مضاعف یعنی ۵۰٪ محاسبه می‌کنیم.

$$۱ \div ۴ = ۰.۲۵$$

$$۰.۲۵ \times ۲ = ۰.۵۰$$

$$۸۰۰,۰۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} = ۴۰۰,۰۰۰$$ ریال هزینه‌ی استهلاک سال اوّل

$$۸۰۰,۰۰۰ - ۴۰۰,۰۰۰ = ۴۰۰,۰۰۰$$

$$۴۰۰,۰۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} = ۲۰۰,۰۰۰$$ ریال هزینه‌ی استهلاک سال دوم

$$۴۰۰,۰۰۰ + ۲۰۰,۰۰۰ = ۶۰۰,۰۰۰$$

$$۸۰۰,۰۰۰ - ۶۰۰,۰۰۰ = ۲۰۰,۰۰۰$$

$$۲۰۰,۰۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} = ۱۰۰,۰۰۰$$ ریال هزینه‌ی استهلاک سال سوم

$$۶۰۰,۰۰۰ + ۱۰۰,۰۰۰ = ۷۰۰,۰۰۰$$

$$۸۰۰,۰۰۰ - ۷۰۰,۰۰۰ = ۱۰۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال چهارم　　　ریال　　　$۱۰۰,۰۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} = ۵۰,۰۰۰$

$$۷۰۰,۰۰۰ + ۵۰,۰۰۰ = ۷۵۰,۰۰۰$$

$$۸۰۰,۰۰۰ - ۷۵۰,۰۰۰ = ۵۰,۰۰۰$$

ملاحظه می‌شود که در این روش، ابتدا باید با توجّه به‌عمر مفید دستگاه، نرخ استهلاک را به روش خطّ مستقیم محاسبه و آن را دو برابر کنیم و هم‌چنین به‌جای بهای تمام شده منهای ارزش قراضه، ارزش دفتریِ موتورسیکلت مبنای استهلاک است. روشن است که ارزش دفتری آن، برابر با بهای تمام شده‌ی اوّلیه منهای ذخیره‌ی استهلاک انباشته است. بدیهی است در پایان سال چهارم، مبلغی به عنوان ارزش دفتری خواهیم داشت که هیچ ارتباطی با ارزش قراضه ندارد. در این روش، می‌توان از فرمول

$$C_K = \left(a - \sum_{i=۱}^{k-۱} C_i\right)\frac{۲}{n}$$

استفاده کرد که در آن $a$، قیمت خرید دارایی با هزینه‌ی نصب و راه‌اندازی و $n$، سال‌های عمر مفید دارایی و $K$، سالی است که قرار است هزینه‌ی استهلاک آن تعیین شود و بالأخره $C$ هزینه‌ی استهلاک سال مورد نظر است.

**مثال ۵ ــ** هزینه‌ی استهلاک مثال ۴ را با استفاده از فرمول گفته شده محاسبه نمایید.

$$\sum_{i=۱}^{۰} C_۰ = ۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال اوّل

$$C_۱ = (۸۰۰,۰۰۰ - ۰) \times \frac{۲}{۴} = ۴۰۰,۰۰۰$$

$$\sum_{i=۱}^{۱} C_۱ = ۴۰۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال دوم

$$C_۲ = (۸۰۰,۰۰۰ - ۴۰۰,۰۰۰) \times \frac{۲}{۴} = ۲۰۰,۰۰۰$$

$$\sum_{i=۱}^{۲} C_۲ = ۴۰۰,۰۰۰ + ۲۰۰,۰۰۰ = ۶۰۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال سوم

$$C_۳ = (۸۰۰,۰۰۰ - ۶۰۰,۰۰۰) \times \frac{۲}{۴} = ۱۰۰,۰۰۰$$

$$\sum_{i=۱}^{۳} C_۳ = ۴۰۰,۰۰۰ + ۲۰۰,۰۰۰ + ۱۰۰,۰۰۰ = ۷۰۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال چهارم

$$C_{۴} = (۸۰۰,۰۰۰ - ۷۰۰,۰۰۰) \times \frac{۲}{۴} = ۵۰,۰۰۰$$

**مثال ۶ــ** شرکت نوبهار، دستگاهی را به قیمت ۵۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری نموده و پیش‌بینی کرده است که این دستگاه ۵ سال عمر مفید خواهد داشت و ارزش قراضه‌ی آن ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خواهد بود. ذخیره‌ی استهلاک سالیانه آن را به سه روش گفته شده محاسبه و با هم مقایسه نمایید.

الف) روش خط مستقیم

$$۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۰۰۰,۰۰۰ = ۵۰,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۵۰,۰۰۰,۰۰۰ \div ۵ = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰$$

$$C = \frac{a-b}{n} = \frac{۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۰۰۰,۰۰۰}{۵} = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰$$

ب) روش مجموع سنوات

$$C_K = \frac{۲(n-K+۱)(a-b)}{n(n+۱)}$$

سال اوّل
$$C_{۱} = \frac{۲(۵-۱+۱)(۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۰۰۰,۰۰۰)}{۵(۵+۱)} = ۱۶,۶۶۶,۶۶۷$$

سال دوم
$$C_{۲} = \frac{۲(۵-۲+۱)(۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۰۰۰,۰۰۰)}{۵(۵+۱)} = ۱۳,۳۳۳,۳۳۳$$

سال سوم
$$C_{۳} = \frac{۲(۵-۳+۱)(۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۰۰۰,۰۰۰)}{۵(۵+۱)} = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰$$

سال چهارم
$$C_{۴} = \frac{۲(۵-۴+۱)(۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۰۰۰,۰۰۰)}{۵(۵+۱)} = ۶,۶۶۶,۶۶۷$$

سال پنجم
$$C_{۵} = \frac{۲(۵-۵+۱)(۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۰۰۰,۰۰۰)}{۵(۵+۱)} = ۳,۳۳۳,۳۳۳$$

$$\sum_{i=۱}^{۵} C_i = ۵۰,۰۰۰,۰۰۰$$

ج) روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف

$$C = \left(a - \sum_{i=۱}^{k-۱} C_i\right) \times \frac{۲}{n}$$

$$\sum_{i=۰}^{۰} C_{۰} = ۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال اوّل $C_{۱} = (۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۰) \times \frac{۲}{۵} = ۲۲,۰۰۰,۰۰۰$

$$\sum_{i=۱}^{۱} C_{۱} = ۲۲,۰۰۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال دوم $C_{۲} = (۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۲۲,۰۰۰,۰۰۰) \times \frac{۲}{۵} = ۱۳,۲۰۰,۰۰۰$

$$\sum_{i=۱}^{۲} C_{۲} = ۲۲,۰۰۰,۰۰۰ + ۱۳,۲۰۰,۰۰۰ = ۳۵,۲۰۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال سوم $C_{۳} = (۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۳۵,۲۰۰,۰۰۰) \times \frac{۲}{۵} = ۷,۹۲۰,۰۰۰$

$$\sum_{i=۱}^{۳} C_{۳} = ۲۲,۰۰۰,۰۰۰ + ۱۳,۲۰۰,۰۰۰ + ۷,۹۲۰,۰۰۰ = ۴۳,۱۲۰,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال چهارم $C_{۴} = (۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۴۳,۱۲۰,۰۰۰) \times \frac{۲}{۵} = ۴,۷۵۲,۰۰۰$

$$\sum_{i=۱}^{۴} C_{۴} = ۲۲,۰۰۰,۰۰۰ + ۱۳,۲۰۰,۰۰۰ + ۷,۹۲۰,۰۰۰ + ۴,۷۵۲,۰۰۰ = ۴۷,۸۷۲,۰۰۰$$

هزینه‌ی استهلاک سال پنجم $C_{۵} = (۵۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۴۷,۸۷۲,۰۰۰) \times \frac{۲}{۵} = ۲,۸۵۱,۲۰۰$

داخل پرانتز، نشان‌دهنده‌ی ارزش دفتری دستگاه در هر سال است.

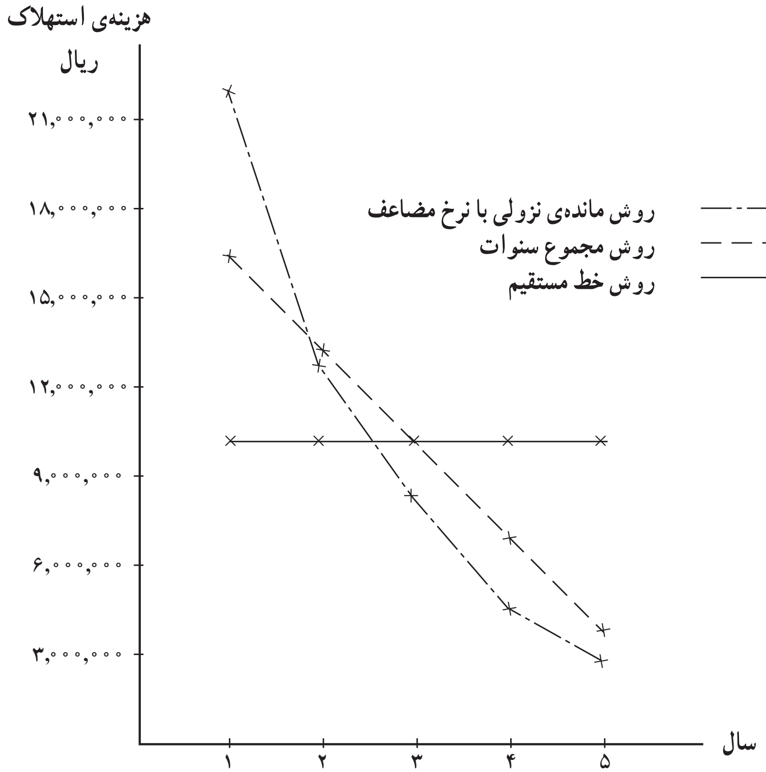
**هزینه‌ی استهلاک سالیانه به روش‌های**

| مانده‌ی نزولی | مجموع سنوات | خط مستقیم | |
|---|---|---|---|
| ۲۲,۰۰۰,۰۰۰ | ۱۶,۶۶۶,۶۶۷ | ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ | سال اوّل |
| ۱۳,۲۰۰,۰۰۰ | ۱۳,۳۳۳,۳۳۳ | ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ | سال دوم |
| ۷,۹۲۰,۰۰۰ | ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ | ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ | سال سوم |
| ۴,۷۵۲,۰۰۰ | ۶,۶۶۶,۶۶۷ | ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ | سال چهارم |
| ۲,۸۵۱,۲۰۰ | ۳,۳۳۳,۳۳۳ | ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ | سال پنجم |

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، برای این دستگاه، روش خطّ مستقیم معقول به‌نظر نمی‌رسد؛ زیرا اگر فرض کنیم مؤسسه بخواهد دستگاه را در سال دوم به‌فروش برساند، بیش از ۲۰٪ کاهش قیمت خواهد داشت. امّا روش مجموع سنوات مناسب‌تر است؛ زیرا در سال‌های ابتدایی بیش از

روش خطّ مستقیم، هزینه‌ی استهلاک دارد. در روش مانده‌ی نزولی سرعت هزینه نمودن بسیار زیاد است ؛ به‌طوری‌که ظرف دو سال اوّل، بیش از هفتاد درصد قیمت دستگاه هزینه شده است. برای روشن‌تر شدن موضوع نمودار ذخیره‌ی استهلاک را به روش‌های مختلف رسم می‌کنیم.

به‌نموداری که هزینه‌ی استهلاک سالیانه مثال ۵ را به روش‌های مختلف نشان می‌دهد، توجّه کنید.




## تمرین‌های فصل چهارم

۱ــ اتومبیلی به‌مبلغ ۲۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری و تخمین زده شده است که بعد از ۵ سال کار، ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال ارزش داشته باشد. هزینه‌ی استهلاک سالانه آن را به‌روش خطّ مستقیم محاسبه کنید. اگر بعد از سه‌سال، موتور و اتاق آن را تعمیر اساسی نماییم و مبلغ ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال هزینه کنیم و در مقابل، عمر مفید آن از ۵ سال به ۶ سال افزایش یابد و ارزش نهایی آن ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال بشود هزینه‌ی استهلاک را از سال چهارم به بعد محاسبه کنید.

۲ـ تمرین شماره‌ی یک را با استفاده از روش مجموع سنوات انجام دهید.

۳ـ تمرین شماره‌ی یک را با استفاده از روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف حل کنید.

۴ـ ماشین چاپی به‌قیمت ۴۰۰,۰۰۰ ریال خریداری و عمر مفید آن ۴ سال و قیمت قراضه آن در پایان عمر مفید مبلغ ۲۵,۰۰۰ ریال برآورد شده است. هزینه‌ی استهلاک سالانه آن را به‌روش‌های گفته شده محاسبه و با هم مقایسه نمایید.

۵ ـ کارخانه‌ای، یک دستگاه قالب‌زنی به‌مبلغ ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری و پیش‌بینی نموده است که بعد از ۵ سال کار، حدود ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال ارزش داشته باشد. هزینه‌ی استهلاک سالیانه دستگاه را به روش‌های گفته شده محاسبه و با هم مقایسه نمایید. در صورتی که پس از ۳ سال، این دستگاه تعمیر اساسی شود و مبلغ ۱۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال هزینه‌ی تعمیر آن گردد، هزینه‌ی استهلاک را از سال چهارم به بعد با استفاده از روش‌های گفته شده محاسبه نمایید. به‌شرطی که اوّلاً قیمت قراضه‌ی آن به ۱۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال و ثانیاً عمر مفید آن از ۵ سال به ۷ سال افزایش یافته باشد.

۶ ـ شرکت محکم کار، ۳ دستگاه ماشین را در ابتدای سال ۱۳۷۳ به‌شرح جدول زیر خریداری نمود :

| ردیف | نوع ماشین | بهای تمام شده<br>ریال | برآورد ارزش اسقاط<br>ریال | برآورد عمر مفید<br>سال |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | قالب زنی | ۲,۸۰۰,۰۰۰ | ۴۰۰,۰۰۰ | ۵ |
| ۲ | پرس | ۴,۲۰۰,۰۰۰ | ۱,۷۰۰,۰۰۰ | ۸ |
| ۳ | رنگ آمیزی | ۱,۷۰۰,۰۰۰ | صفر | ۶ |

الف) هزینه‌ی استهلاک هر دستگاه را با روش خطّ مستقیم محاسبه کنید.

ب) هزینه‌ی استهلاک هر دستگاه را با روش مجموع سنوات محاسبه کنید.

ج) هزینه‌ی استهلاک هر دستگاه را با روش مانده‌ی نزولی محاسبه کنید.

د) کلّ هزینه‌ی استهلاک شرکت را در هر سال با روش‌های گفته شده به‌تفکیک محاسبه نمایید.

۷ـ عمر مفید یک دستگاه رایانه خریداری شده ۶ سال است، چنان‌چه ارزش اسقاط این دستگاه ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال و هزینه‌ی استهلاک سالانه‌ی آن به روش خط مستقیم ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال در سال باشد، قیمت تمام شده‌ی دستگاه را حساب کنید.

# فصل پنجم

## کاربردهای معادلات درجه‌ی اوّل در حسابداری

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ نقطه‌ی تعادل انواع توابع را تعیین نماید.

۲ــ اقلام مجهول هر حساب را به شکل‌های مختلف محاسبه کند.

۳ــ معادلات خطّی را در مسائل مالی انجام دهد.

## ۵ــ کاربردهای معادلات درجه‌ی اوّل در حسابداری

### ۱ــ ۵ مقدمه

کسانی که با حسابداری آشنا هستند می‌دانند که در بسیاری از موارد ممکن است اقلامی‌در دست نباشد ولی با اطّلاع از سایر داده‌ها می‌توان به اقلام مورد نظر دست یافت. مثلاً اگر هزینه‌ی ثابت، هزینه متغیر و تعداد واحد تولید شده در یک شرکت معین باشد، می‌توان بهای تمام شده‌ی هر واحد را تعیین نمود. به‌علاوه، اگر قیمت فروش مشخص شده باشد می‌توان تعداد واحد کالا در نقطه سر به سر را معین نمود. قبل از وارد شدن به اصل موضوع، در تعاریف زیر دقت کنید.

**هزینه‌ی ثابت:** به هزینه‌هایی که به تعداد تولید بستگی ندارد هزینه ثابت گویند، مانند هزینه‌ی نگهبانی یا هزینه‌ی روشنایی یا حقوق مدیریت و آن را با Fc نشان می‌دهند(برای تعداد معین تولید).

**هزینه‌ی متغیر:** به هزینه‌هایی که رابطه مستقیم با تعداد تولید دارد هزینه متغیر گویند، مانند هزینه‌ی مواد اولیه برای ساخت یک سطل پلاستیکی یا هزینه‌ی دستمزد برای دوختن یک پیراهن یا هزینه‌ی مصرفی برق برای پرس کردن یک دکمه و آن‌را با Vc نشان می‌دهند.

**هزینه‌ی کل:** مجموع هزینه‌های ثابت و هزینه‌های متغیر یک واحد تولیدی در یک دوره معین

را هزینه‌ی کل گویند و آن را با Tc نشان می‌دهند.

(=) **تساوی:** دو شئ یا دو عدد را زمانی با هم مساوی گویند که عیناً مانند یکدیگر باشند و نه مشابه یکدیگر، مثلاً ۴ = ۴

**معادله:** اگر تساوی دو عبارت به متغیّری بستگی داشته باشد و این تساوی به ازای یک یا بعضی مقادیر عددی که به متغیّر می‌دهیم برقرار شود، به این‌گونه تساوی، معادله و یا تساوی شرطی گویند.

**مثال ۱ــ** هزینه‌ی ثابت مؤسّسه‌ای، روزانه ۳۰۰,۰۰۰ ریال و هزینه‌ی متغیّر هر واحد تولید شده ۱۰,۰۰۰ ریال باشد و روزی ۲۰ واحد کالا تولید گردد. بهای تمام شده‌ی هر واحد را تعیین کنید.

کل هزینه $۳۰۰,۰۰۰+۲۰\times۱۰,۰۰۰=۵۰۰,۰۰۰$

بهای تمام شده هر واحد $\frac{۵۰۰,۰۰۰}{۲۰}=۲۵,۰۰۰$

حال اگر تعداد تولید در یک روز افزایش یابد و به ۳۰ واحد برسد آن‌گاه بهای تمام شده برابر خواهد بود با :

$$۳۰۰,۰۰۰+۳۰\times۱۰,۰۰۰=۶۰۰,۰۰۰$$

بهای تمام شده‌ی هر واحد $\frac{۶۰۰,۰۰۰}{۳۰}=۲۰,۰۰۰$

ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد تولید از ۲۰ واحد به ۳۰ واحد بهای تمام شده از ۲۵,۰۰۰ ریال به ۲۰,۰۰۰ ریال کاهش می‌یابد. زیرا هزینه‌ی ثابت تغییری نداشته است. پس هر چه تعداد تولید افزایش یابد، از بهای تمام شده یک واحد کاسته می‌شود. ولی از طرف دیگر امکان افزایش تولید کالا تا حدی عملی است و از طرفی تقاضا برای خرید کالا نیز محدودیّت دارد. بنابراین، با جمع‌آوری اطلاعات از بازار و ظرفیت اسمی مؤسسه، می‌توان با استفاده از معادلات به بهترین شرایط تولید، که سودآوری مؤسّسه را دربر داشته باشد، دسترسی پیدا کرد.

## ۲ــ ۵ حل معادله درجه یک، یک مجهولی

منظور از حلّ معادله‌ی درجه یک، پیدا کردن جواب برای معادله است، به شکلی که این جواب بتواند معادله را به یک تساوی تبدیل کند. برای حل کردن معادله درجه‌ی یک، معمولاً باید آن را به‌صورت $ax = b$ درآورید.

دو معادله وقتی هم‌ارز هستند که جواب یا جواب‌های آن‌ها یکی باشد. برای حل معادله‌ی فوق

به شرط $a \neq ۰$ می‌توانیم طرفین را بر a تقسیم کنیم.

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$$

در نتیجه $x = \frac{b}{a}$ جواب معادله است.

اگر $a = ۰$ و $b \neq ۰$ باشد، آن‌گاه $۰ \times x = b$ روشن است که برای x هیچ مقداری وجود نخواهد داشت که در رابطه‌ی بالا صدق کند. بنابراین، به این‌گونه معادلات، معادله‌ی غیرممکن گویند. امّا اگر $b = ۰$ باشد، آن‌گاه $۰ \times x = ۰$ و برای x تعداد بسیار زیادی جواب دل‌خواه وجود دارد، به این گونه معادلات، معادله‌ی مبهم گویند.

گاهی می‌توان برای تقاضای کالای معینی در بازار معادله درجه‌ی یک تشکیل داد و هم‌چنین برای عرضه‌ی همان کالا، گاهی می‌توان معادله‌ی درجه یک تشکیل داد. برای به‌دست آوردن نقطه‌ی تعادل می‌توان معادله‌ی تقاضا را با معادله عرضه مساوی قرار داد.

**مثال ۲ــ** اگر معادله‌ی عرضه برای کالایی $S = ۲۵x + ۲۵$ و معادله‌ی تقاضا برای همان کالا $D = -۵۰x + ۲۵۰$ باشد، نقطه تعادل معادلات عرضه و تقاضا برای کالای مزبور را به‌دست آورید.

$$S = ۲۵x + ۲۵$$

$$D = -۵۰x + ۲۵۰$$

$$S = D$$

$$۲۵x + ۲۵ = -۵۰x + ۲۵۰$$

$$۵۰x + ۲۵x + ۲۵ = ۵۰x - ۵۰x + ۲۵۰$$

$$۷۵x + ۲۵ = ۲۵۰$$

$$۷۵x + ۲۵ - ۲۵ = ۲۵۰ - ۲۵$$

$$۷۵x = ۲۲۵$$

$$x = \frac{۲۲۵}{۷۵}$$

$$x = ۳$$

بنابراین اگر به ازای x، عدد ۳ را در معادله قرار دهیم، دو طرف با هم مساوی می‌شوند. بدیهی است اگر به‌ازای جمیع مقادیری که به متغیر داده می‌شود، هر دو طرف با هم مساوی باشند، این

تساوی را اتّحاد گویند.

**مثال ۳ــ** اگر $9x - 4x + 1 = 3x + 2x + 1$ باشد در نتیجه $5x + 1 = 5x + 1$ .

ملاحظه می‌شود که به ازای جمیع مقادیری که به x داده می‌شود، دو طرف با هم مساوی هستند. بنابراین، عبارت فوق یک اتّحاد است. و یا

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

که به ازای جمیع مقادیر a و b دو طرف با هم مساوی هستند.

**نقطه سربه‌سر چیست؟** مقصود تعداد واحد کالایی است که باید تولید شود تا درآمد حاصل از فروش این مقدار کالا، کاملاً برابر با هزینه‌ی تمام شده آن باشد. نقطه‌ی سربه‌سر را با Q نشان می‌دهند. اگر قیمت فروش یک واحد کالا را با P نشان دهیم نقطه‌ی سربه‌سر را می‌توان از فرمول $Q = \frac{Fc}{P-V}$ به‌دست آورد.

زیرا در نقطه‌ی سربه‌سر، سود ویژه مساوی صفر است یعنی درآمد کل با هزینه کل مساوی است.

**مثال ۴ــ** هزینه‌ی ثابت تولید کالایی ۱۰۰۰ ریال و هزینه‌ی متغیّر برای هر واحد آن ۸ ریال است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا ۱۰ ریال باشد، نقطه‌ی سربه‌سر کالا را به‌دست آورید.

$$10x = 8x + 1000$$

$$10x - 8x = 8x + 1000 - 8x$$

$$2x = 1000$$

$$x = 500$$

و یا با استفاده از فرمول

$$Q = \frac{Fc}{P-V}$$

$$Q = \frac{1000}{10-8} = \frac{1000}{2} = 500$$

بنابراین، حداقل تعداد تولید باید ۵۰۰ واحد باشد تا مؤسّسه زیان نداشته باشد. پس اگر ۶۰۰ واحد تولید گردد سود به دست آمده برابر با

$$600 \times 10 - 1000 - 600 \times 8 =$$

$$6000 - 1000 - 4800 =$$

$$6000 - 5800 = 200$$

پس سود به دست آمده برابر با ۲۰۰ ریال است.

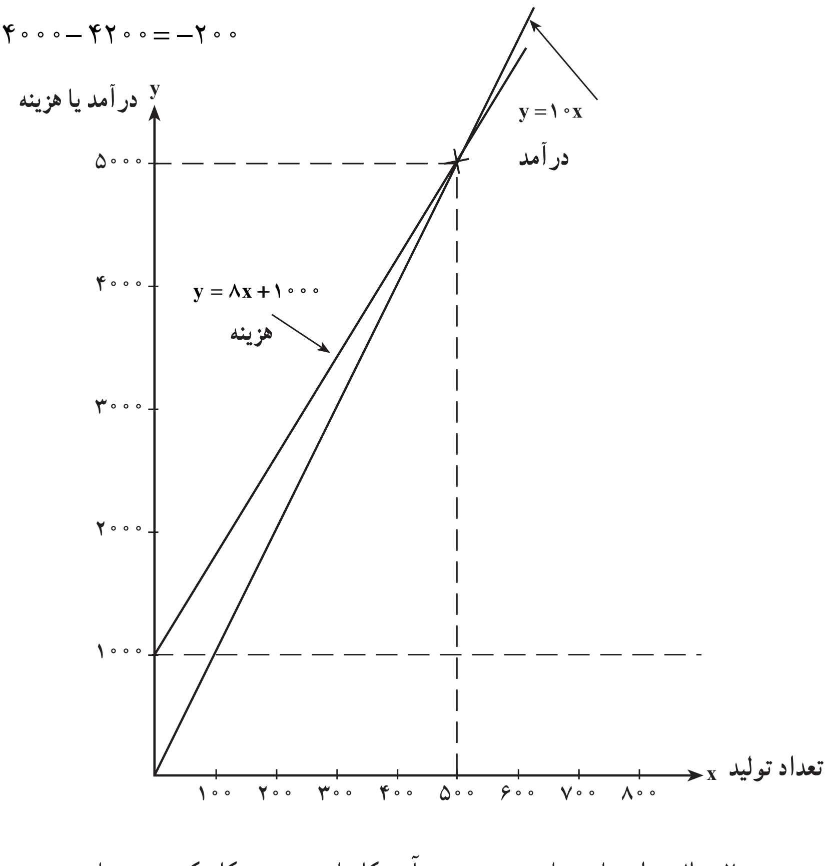
معادله‌ی هزینه‌ی کل را می‌توان به صورت $y = 8x + 1000$ و معادله درآمد کلی را می‌توان به صورت $y = 10x$ نشان داد. حال اگر نمودار معادلات فوق را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، محل تقاطع این دو معادله نقطه $y = 5000$ و $x = 500$ (که همان نقطه‌ی سر به سر است، یعنی $Q = 500$) باید باشد تا درآمد کل برابر با هزینه کل و مساوی ۵۰۰۰ ریال گردد.

روشن است که اگر تعداد واحدهای تولیدی از ۵۰۰ واحد کم‌تر باشد مؤسسه با زیان مواجه خواهد شد. مثلاً اگر ۴۰۰ واحد تولید شده باشد.

$$400 \times 10 - 1000 - 400 \times 8 =$$

$$4000 - 1000 - 3200 =$$

$$4000 - 4200 = -200$$




مؤسسه ۲۰۰ ریال زیان داشته است، یعنی درآمد کل از هزینه‌ی کل کم‌تر بوده است. پس نقطه‌ی سربه‌سر همیشه حداقل تعداد تولید را در یک مؤسسه نشان می‌دهد.

همان‌گونه که مشهود است، در نقطه‌ی $x=۵۰۰$ و $y=۵۰۰۰$ هر دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی درآمد و هزینه باهم برابر است. بنابراین، برای xهای بزرگ‌تر از ۵۰۰ ، درآمد از هزینه بیش‌تر خواهد بود، مانند $x=۶۰۰$

$$y=۱۰x$$

$$y=۱۰\times۶۰۰=۶۰۰۰$$

$$y=۸x+۱۰۰۰$$

$$y=۸\times۶۰۰+۱۰۰۰=۵۸۰۰$$

$۶۰۰۰-۵۸۰۰=۲۰۰$ تفاوت درآمد و هزینه

**مثال ۵ــ** دفاتر حسابداری مؤسّسه‌ای نشان می‌دهد که ظرف ۳ سال گذشته، جمعاً مبلغ ۳۰,۰۰۰ ریال به صورت ذخیره‌ی استهلاک دستگاهی که قیمت خرید آن ۱۲۰,۰۰۰ ریال بوده کسر گردیده است. اگر روش محاسبه‌ی استهلاک، خطی بوده باشد و عمر مفید دستگاه ۱۰ سال تخمین زده شود، قیمت قراضه‌ی دستگاه را بعد از ۱۰ سال تعیین کنید.

$$(۱۲۰,۰۰۰-x)\times\frac{۱۰}{۱۰۰}\times۳=۳۰,۰۰۰$$

$$۱۲۰,۰۰۰-x=۱۰۰,۰۰۰$$

$x=۲۰,۰۰۰$ قیمت دستگاه پس از ۱۰ سال

همان‌گونه که ملاحظه شد، برای هر معادله درجه‌ی اوّل (اگر توان مجهول، یک باشد آن را معادله درجه‌ی یک گویند) در ازای x جوابی می‌توان یافت. به طوری که دوطرف معادله در ازای آن x برابر گردند. این x را نیز نقطه‌ی تعادل معادله گویند.

**مثال ۶ــ** نقطه‌ی تعادل معادله $۳x+۷=۲x+۱۲$ را پیدا کنید.

$$۳x+۷-۷=۲x+۱۲-۷$$

$$۳x=۲x+۵$$

$$۳x-۲x=۲x-۲x+۵ . \quad x=۵$$

**مثال ۷ــ** محیط انبار مربع شکلی ۲۰ متر است. به هریک از اضلاع آن، چند متر اضافه کنیم تا به محیط آن ۲۴ متر افزوده گردد.

$۲۰+۲۴=۴۴$ محیط انبار جدید

$۲۰ . ۴=۵$ طول یک ضلع انبار

طول یک ضلع انبار جدید $x+5$

$4(x+5)=44$

$4x+20=44$

$4x+20-20=44-20$

$4x=24 \quad . \quad x=6$

طول ضلع انبار جدید $6+5=11$

**مثال ۸ ــ** سردخانه‌ی هتلی به شکل مکعّب به ضلع ۲ متر است. با توجّه به نیاز هتل حجم سردخانه باید دو برابر شود امّا از جهت سقف و عرض امکان افزایش نیست. بنابراین، فقط طول سردخانه قابل افزایش است. تعیین کنید چه مقدار به طول سردخانه باید اضافه گردد تا حجم آن دو برابر شود.

طول جدید متر $2+x$

متر مکعّب حجم سردخانه $2\times2\times2=8$

متر مکعّب حجم سردخانه جدید $8\times2=16$

$(2+x)\times2\times2=8+4x$

$8+4x=16$

$8-8+4x=16-8$

$4x=8 \quad . \quad x=2 \quad .$ طول جدید متر $=. \quad 2+2=4$

**مثال ۹ ــ** در پایان سال گذشته کارکنان یک شرکت، زمانی که مشغول تراز گرفتن دفاتر حسابداری بودند، متوجّه شدند که مانده‌ی طرف بدهکار با مانده‌ی طرف بستانکار ترازنامه ۱۹۸۰ ریال اختلاف دارد. رئیس حسابداری معتقد بود که به احتمال زیاد در انتقال عددی، یک صفر آن حذف گردیده است. اگر حدس او درست باشد تعیین کنید چه رقمی واقعی و چه رقمی اشتباه ثبت شده است؟

اگر فرض کنیم به جای ۱۰۰۰، ۱۰۰ ثبت شده باشد، پس به جای رقم اصلی ده درصد آن رقم ثبت گردیده است.

$$(x-\frac{10}{100}x)=1980$$

طرفین را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم $100x-10x=198000$

$90x=198000$

بنابراین، اشتباه در ثبت ۲۲۰ به جای ۲۲۰۰ است. $x=۲۲۰۰$

یا برعکس، زیرا $۲۲۰۰-۲۲۰=۱۹۸۰$

روشن است که حل معادلات درجه‌ی اوّل بسیار ساده است، امّا تشکیل معادلات احتیاج به دقّت و تمرین زیاد دارد.

## ۳ـ ۵ معادلات خطّی

هرگاه بتوان رابطه‌ی بین دو متغیّر مثلاً فروش و هزینه‌ی تبلیغات یک مؤسّسه را به صورت معادله‌ی درجه‌ی اوّل فرضی در آورد، به آن معادله‌ی خطّی گویند. مثلاً اگر y را فروش ماهیانه و x را هزینه‌ی تبلیغات یک مؤسّسه فرض کنیم، معادله $y=۱۰۰+۲x$ بین x و y روابطی را برقرار می‌نماید.

این معادله نشان می‌دهد که اگر y . ۱۰۰ باشد، مبلغی بابت تبلیغات پرداخت نخواهد شد ولی اگر y . ۱۰۰ باشد پرداخت هزینه تبلیغات عملی‌است.

**مثال ۱۰ ــ** اگر فروش ماهیانه ۱۲۰ ریال باشد، چه مبلغی را می‌توان به هزینه‌ی تبلیغات اختصاص داد؟

$$y=۱۰۰+۲x$$

$$۱۲۰=۱۰۰+۲x$$

$$۱۲۰-۱۰۰=۱۰۰+۲x-۱۰۰$$

$$۲۰=۲x$$

پس، ۱۰ ریال می‌توان به تبلیغات اختصاص داد. $\boxed{x=۱۰}$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود این معادله‌ی خطّی، بی‌نهایت جواب دارد. یعنی به ازای xهای مختلف yهای مختلف به‌دست می‌آید.

## ۴ـ ۵ دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات عبارت است از یک یا چند معادله که در هریک، یک یا چند متغیّر وجود داشته باشد.

منظور از حل دستگاه معادلات خطّی، به‌دست آوردن جواب‌های معادله (مقادیر مربوط به متغیرها) است. به این ترتیب که اگر مقادیر به‌دست آمده را در دستگاه قرار دهیم، دو طرف معادله مساوی گردد. برای حل مسائل و به دست آوردن جواب‌ها باید تعدادی معادله تشکیل دهیم.

**مثال ۱۱ــ** دو پالایشگاه وجود دارد که در هر ساعت محصولات مشترکی را طبق جدول زیر تولید می‌کنند.

| | پالایشگاه شماره‌ی دو | پالایشگاه شماره‌ی یک |
|---|---|---|
| **محصول در هر ساعت** | $y$ | $x$ |
| بنزین (هزار بشکه) | ۳ | ۲ |
| نفت (هزار بشکه) | ۱ | ۱ |

چنان‌چه سفارش تولید ۱۱ هزار بشکه بنزین و ۵ هزار بشکه نفت داده شده باشد؛ معیّن کنید این دو پالایشگاه در چه مدّت زمانی بدون تولید اضافی، میزان سفارش را انجام می‌دهند؟

$$\begin{cases} ۲x+۳y=۱۱ \\ x+y=۵ \end{cases}$$

معادله‌ی دوم را در ۲ ضرب و از معادله‌ی یک کم می‌کنیم.

$$-\begin{cases} ۲x+۳y=۱۱ \\ ۲x+۲y=۱۰ \end{cases}$$

$$۳y-۲y=۱۱-۱۰$$

$$y=۱$$

$$x+۱=۵$$

$$x+۱-۱=۵-۱$$

$$x=۴$$

بنابراین، لازم است که پالایشگاه شماره‌ی یک، چهار ساعت و پالایشگاه شماره‌ی دو، یک ساعت پالایش نماید تا اقلام مورد نیاز تأمین گردد.

**مثال ۱۲ــ** شرکتی دارای دو کارگاه خیاطی است. کارگاه اوّل، در هر ساعت می‌تواند ۴ کت و ۶ شلوار بدوزد. کارگاه دوم، در هر ساعت ۷ کت و ۱۳ شلوار می‌دوزد. اگر شرکت قراردادی منعقد نموده باشد که هر روز ۴۰ کت و ۷۰ شلوار تحویل دهد، معیّن کنید هر کارگاه باید چند ساعت در روز کار کند که ضمن تأمین نیاز شرکت، لباس اضافی تولید نشود؟ تعداد ساعاتی را که کارگاه اوّل باید فعال باشد، $x$ فرض می‌نماییم.

تعداد ساعاتی را که کارگاه دوم باید فعّال باشد، y فرض می‌کنیم.

| | کارگاه دوم | کارگاه اوّل |
|---|---|---|
| | $y$ | $x$ |
| کت | ۷ | ۴ |
| شلوار | ۱۳ | ۶ |

$$3 \cdot \quad 4x+7y=40$$

$$2 \cdot \quad 6x+13y=70$$

برای حلّ این دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی کافی است معادله‌ی اوّل را سه برابر و معادله‌ی دوم را دو برابر کنیم. سپس، نتایج به‌دست آمده را از هم کم کنیم تا یکی از مجهولات حذف گردد.

$$-\ 12x+21y=120$$

$$12x+26y=140$$

$$5y=20 \qquad y=4$$

$$4x+7\times 4=40$$

$$4x+28=40$$

$$4x+28-28=40-28$$

$$4x=12$$

$$x=3$$

درنتیجه، باید کارگاه اوّل روزی سه ساعت و کارگاه دوم روزی چهار ساعت فعال شود تا سفارش‌ها تهیّه گردد.

**مثال ۱۳ــ** اگر معادلـه‌ی تقاضا برای کـالایی برابر با $y=15-3x$ و معادلـه‌ی عرضه برای همان کالا برابر با $y=4x+1$ باشد، نقطه‌ی تعادل معادلات عرضه و تقاضا برای کالای مزبور را پیدا کنید. در این معادله، فقط به ازای $x=2$ تعادل برقرار است و درنتیجه $y=9$ است.

$$4x+1=15-3x$$

$$4x+1+3x=15-3x+3x$$

$$7x=14$$

$$x=2$$

$$y=9$$

## تمرین‌های فصل پنجم

۱ــ معادلات زیر را حل و جواب آن‌ها را پیدا کنید.

$$(x+۳)-(x-۳)=\frac{۵x+۱}{۲} \qquad ۳x+۲=۷x-۲$$

$$\frac{x-۲}{۳}-\frac{۱۲-x}{۲}+۱=\frac{۵x-۶۳}{۴} \qquad ۱۶x-۲۵=۲x+۳$$

$$\frac{x-۲}{۲}-(x-\frac{۲x-۱}{۳})=\frac{-۱}{۳} \qquad ۵x-۲=۷۳$$

۲ــ معادله‌ی عرضه و تقاضا برای کالایی به صورت زیر است. نمودار آن را رسم و نقطه‌ی تعادل معادلات را پیدا کنید.

$$y=۷x+۶$$

$$y=۱۶-۲x$$

۳ــ کلّ هزینه‌ی ثابت برای تولید کالایی ۷۵۰ ریال و هزینه‌ی متغیّر برابر با ۷۰٪ قیمت فروش آن است. اگر قیمت فروش هر واحد ۱۰ ریال باشد :

الف) نقطه‌ی سربه‌سر آن کالا را پیدا کنید.

ب) اگر هزینه‌ی متغیّر به ۸۰٪ قیمت فروش افزایش یابد، نقطه‌ی سربه سر را پیدا کنید.

ج) اگر هزینه‌ی ثابت ۲۰٪ افزایش پیدا کند و هزینه‌ی متغیّر همان ۷۰٪ قیمت فروش باشد، نقطه‌ی سربه‌سر را محاسبه کنید.

۴ــ مبلغ ۱۶۴,۰۰۰ ریال را بین چهار نفر چنان تقسیم کنید که اوّلی ۴ برابر چهارمی و چهارمی ۴ برابر سومی و دومی برابر اوّلی و چهارمی سهم ببرند.

۵ــ اختلاف مانده‌ی بدهکار و مانده‌ی بستانکار ترازنامه‌ای ۴۵۶۳۰ ریال است. اگر به احتمال زیاد این اختلاف ناشی از ثبت یک رقم با حذف صفر سمت راست آن باشد، آن عدد واقعی و اشتباه را بیابید.

۶ــ محیط حوض مستطیل شکلی ۱۴ متر است. اگر فرض کنیم که عرض آن ثابت و طول آن قابل تغییر باشد و بخواهیم محیط آن به ۱۰ متر کاهش داده شود، تعیین کنید که طول آن حوض چه مقدار باید کاهش داده شود؟

۷ــ یک شرکت با تدارکات ارتش قراردادی منعقد نموده که روزانه ۱۱۰,۰۰۰ کیلو روغن جامد و ۴۱,۰۰۰ کیلو روغن مایع تحویل نماید. هیئت مدیره تصمیم گرفته است که روغن مورد نیاز

این قرارداد را فقط از طریق دو کارخانه، که یکی در تهران و دیگری در شیراز است، تأمین نماید.

ظرفیّت کارخانه‌ی تهران در هر ساعت ۱۰,۰۰۰ کیلو روغن جامد و ۴,۰۰۰ کیلو روغن مایع است. ظرفیت کارخانه‌ی شیراز در هر ساعت ۶,۰۰۰ کیلو روغن جامد و ۲,۰۰۰ کیلو روغن مایع است.

تعیین کنید هریک از این دو کارخانه روزانه باید چند ساعت فعّال باشند تا شرکت بتواند روغن مورد نیاز را تحویل دهد و روغن اضافی در انبار نماند.

۸ــ اگر قیمت فروش واحد کالایی ۱۲۵ ریال و هزینه‌ی متغیّر آن ۱۰۵ ریال باشد، نقطه‌ی سربه‌سر کالا را به‌دست آورید (در صورتی که می‌دانیم کل هزینه ثابت ۲,۵۰۰ ریال است).

۹ــ اندازه‌ی ضلع انبار مربع شکلی ۱۰ متر است، گنجایش آن کافی نیست و نیاز است که اضلاع مربّع از هر طرف به یک اندازه افزایش یابد، تا در کل ۲۴ متر به محیط آن افزوده گردد. مقدار افزایش از هر طرف را تعیین کنید.

۱۰ــ معادله‌ی تقاضا برای کالایی $y=۱۰۰-۵x$ است و معادله‌ی عرضه برای همان کالا $y=۱۵x+۲۰$ است. اولاً قیمت و مقدار کالا در نقطه‌ی تعادل را به‌دست آورید. ثانیاً اگر قیمت کالا ۵ ریال باشد مقادیر هر یک از عرضه و تقاضا را مشخص کنید و بررسی کنید که بازار در وضعیت کمبود یا مازاد است؟ ثالثاً اگر قیمت کالا ۳ ریال باشد مقادیر هر یک از عرضه و تقاضا را تعیین و وضعیت بازار را نیز مشخص نمایید.

۱۱ــ هزینه‌ی ثابت شرکتی ۵۰۰,۰۰۰ ریال و هزینه‌ی متغیر هر واحد کالا ۴۰۰۰ ریال است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا ۵۰۰۰ ریال باشد مطلوب است اولاً تعداد تولید در نقطه‌ی سربه‌سر، ثانیاً چنان‌چه تعداد تولید ۴۰۰ واحد باشد این شرکت سود ده است، یا زیان ده؟ ثالثاً اگر با تغییراتی در روش تولید، هزینه‌ی ثابت هیچ‌گونه تغییری نیابد و در نقطه‌ی سربه‌سر ۲۵۰ واحد کالا تولید گردد هزینه‌ی متغیر کاهش یا افزایش داشته است؟ چه مقدار؟

۱۲ــ هزینه‌ی ثابت شرکتی برابر با ۸,۰۰۰,۰۰۰ ریال و هزینه‌ی متغیر هر واحد کالا ۶۰۰۰ ریال است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا برابر ۱۰,۰۰۰ ریال باشد، اولاً تعداد تولید در نقطه‌ی سربه‌سر را محاسبه کنید. ثانیاً در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد میزان سود یا زیان شرکت را محاسبه کنید. ثالثاً درصورتی که شرکت بخواهد مبلغ ۲۰۰,۰۰۰ ریال سود داشته باشد چه تعداد کالا باید تولیدگردد؟

۱۳ــ شرکتی دارای دو کارگاه تولیدی است. کارگاه اوّل، در هر ساعت می‌تواند ۵۰۰ واحد چنگال و ۶۰۰ واحد قاشق تولید نماید. هم‌چنین کارگاه دوم، در هر ساعت می‌تواند ۴۰۰ واحد چنگال

و ۷۰۰ واحد قاشق تولید نماید. با توجه به این‌که شرکت قراردادی منعقد نموده است که هر روز باید ۵۸۰۰ واحد چنگال و ۸۵۰۰ واحد قاشق تحویل دهد، معیّن کنید هرکارگاه لازم است چند ساعت در روز کار کند که ضمن تأمین نیاز، قاشق و چنگال اضافی تولید نگردد؟

# فصل ششم

## کاربردهای معادلات درجه‌ی دوم در حسابداری

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ نقطه‌ی تعادل انواع توابع را تعیین کند.

۲ــ دستگاه‌های معادلات را برای تعیین انواع اقلام مجهول به‌کار برد.

۳ــ معادلات درجه‌ی دوم را حل و بحث نماید.

## ۶ــ کاربردهای معادلات درجه‌ی دوم در حسابداری

همان‌گونه که در فصل قبل گفته شد، صورت کلّی معادلات درجه‌ی یک $ax = b$ است، که به آن معادلات خطی نیز می‌گویند. اگر طرفین را بر $(a \neq ۰)$ تقسیم کنیم

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$x$ به دست می‌آید. بدیهی است در خیلی از موارد، شکل ظاهری معادله‌ی درجه‌ی اوّل به صورت $ax = b$ نیست و باید عملیّاتی روی آن انجام شود تا به این صورت درآید.

**مثال ۱ــ** شرکتی لیوان پلاستیکی تولید می‌نماید. هزینه‌ی متغیر هر لیوان ۲۰ ریال و هزینه‌ی ثابت آن شرکت ۵۰۰ ریال در روز است. اگر قیمت فروش هر لیوان ۳۰ ریال باشد، چه تعداد لیوان باید در روز تولید شود و به فروش برسد تا شرکت نه سود داشته باشد و نه زیان؟

$$۳۰x = ۲۰x + ۵۰۰$$

$$۳۰x - ۲۰x = ۲۰x + ۵۰۰ - ۲۰x$$

$$۱۰x = ۵۰۰$$

$$x = ۵۰$$

## ۱ــ۶ معادله‌ی درجه‌ی دوم

در مورد معادله‌ی درجه‌ی دوم نیز، صورت کلی آن $ax^۲+bx+c=۰$ است، که به آن معادله‌ی درجه‌ی دوم کامل می‌گویند. روشن است که پارامترهای a، b و c اعداد ثابتی هستند و گاهی اوقات ممکن است صفر نیز باشند.

اگر a برابر با صفر باشد، معادله به درجه‌ی اوّل تبدیل می‌شود. بنابراین، با شرط $a\neq۰$ این معادله درجه‌ی دوم خواهد بود.

$$bx+c=۰$$

اگر $b=۰$ باشد،

$$ax^۲+c=۰$$

معادله دارای دو جواب قرینه است (به شرطی که a و c علامت مختلف داشته باشند).

$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ اگر b و c هر دو صفر باشند و a مخالف صفر باشد، آن‌گاه $ax^۲=۰$ یعنی $x=۰$ (مضاعف). دقّت کنید که اگر $b=۰$ باشد و $a>۰$ و $c>۰$ باشد و یا a و c هر دو منفی باشد به‌عبارت دیگر اگر $b=۰$ و a و c هر دو دارای علامت یک‌سان باشند، آن‌گاه معادله جواب حقیقی نخواهد داشت و جواب، موهومی‌خواهد بود.

درصورتی که $c=۰$ باشد $ax^۲+bx=۰ \Rightarrow (ax+b)\times x=۰$ یکی از جواب‌ها صفر و جواب دیگر $\frac{-b}{a}$ است $x=۰$ ، $x=\frac{-b}{a}$

**مثال ۲ــ** معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$۴x^۲+۸x=۰$$

$$x=۰ \qquad x=\frac{-۸}{۴}=-۲$$

**مثال ۳ــ** معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$-۶x^۲+۵۴=۰$$

$$x^۲=\frac{۵۴}{۶}=۹$$

$$x=\pm۳$$

**مثال ۴ــ** معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲x^۲+۷=۰ \qquad ۲x^۲=-۷$$

$$x^۲=\frac{-۷}{۲}$$

جواب حقیقی ندارد

### ۱ــ۱ــ۶ حل معادلات درجه‌ی دوم کامل

$$ax^2 + bx + c = 0$$

چون معادله‌ی درجه‌ی دوم کامل است، پس $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$. بنابراین، طرفین را بر a، که مخالف صفر است، تقسیم می‌نماییم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

با استفاده از دو جمله‌ی اوّل، آن را به اتّحاد اوّل مشابه می‌کنیم. سپس، جمله‌ی سوم را، که $\frac{b^2}{4a^2}$ است، به آن اضافه و کم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

درنتیجه

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0$$

و

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

اگر از طرفین جذر بگیریم

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پس

$$x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

که با استفاده از این فرمول (به شرطی که زیر رادیکال مقداری مثبت باشد) همیشه دو جواب برای معادله‌ی درجه‌ی دوم به دست می‌آید. امّا اگر $b^2 - 4ac = 0$ باشد، معادله، یک ریشه‌ی مضاعف خواهد داشت و اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد، معادله، جواب حقیقی ندارد و ریشه‌های موهومی خواهد داشت.

معمولاً $b^2 - 4ac$ را با علامت دلتا ($\Delta$) نشان می‌دهند و به آن مبیّن معادله‌ی درجه‌ی دو می‌گویند.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

پس، اگر $0 < \Delta$ باشد، معادله دارای دو جواب حقیقی است و اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای جواب مضاعف است و اگر $0 > \Delta$ باشد، معادله دارای جواب حقیقی نیست و دارای دو جواب موهومی‌است.

**مثال ۵ــ** معادله را حل و پاسخ آن را پیدا کنید.

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4\times2\times3 = 25$$

**مثال ۶ــ** معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x' = \frac{-7\pm5}{6} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 36 = 0$$

ریشه‌ی مضاعف $x = \frac{6}{2} = 3$

**مثال ۷ــ** معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$\Delta = 9 - 40 = -31$$

چون $0 > \Delta$ است، پس معادله‌ی زیر جواب حقیقی ندارد.

**مثال ۸ــ** معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x' = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{4-2}{2} = 1$$

**۲ــ۱ــ۶ حالت خاص معادله‌ی درجه‌ی دوم:** همان گونه که در مثال ۷ ملاحظه نمودید، b عددی زوج است و می‌توان از نصف آن، یعنی $\frac{b}{2}$ استفاده کرد.

اگر $b'$ را نصف b فرض کنیم، خواهیم داشت : $b = 2b'$

و معادله به این صورت درمی‌آید : $ax^2 + 2b'x + c = 0$

جواب‌ها عبارت‌اند از : $x'', x' = \frac{-۲b' \pm \sqrt{۴b'^{۲} - ۴ac}}{۲a}$

و یا $x', x'' = \frac{-۲(-b' \pm \sqrt{b'^{۲} - ac})}{۲a}$

درنتیجه $x', x'' = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^{۲} - ac}}{a}$

و $\Delta' = b'^{۲} - ac$

بنابراین، برای سهولت می‌توان از این فرمول به‌جای فرمول قبلی‌درزمانی که b زوج باشد استفاده نمود. روشن است تمام مطالبی که در مورد $\Delta$ گفته شد، عیناً در مورد $\Delta'$ صدق می‌کند.

**مثال ۹ــ** معادله‌ی مثال ۸ را با استفاده از فرمول اخیر حل کنید.

$$x^{۲} - ۴x + ۳ = ۰$$

$$\Delta' = b'^{۲} - ac = ۴ - ۳ = ۱$$

$$x', x'' = \frac{۲ \pm ۱}{۱} = \begin{cases} ۳ \\ ۱ \end{cases}$$

**مثال ۱۰ــ** معادله $x^{۲} - ۱۸x + ۳۲ = ۰$

را با استفاده از هر دو فرمول گفته شده حل کنید.

$$\Delta = ۱۸ \times ۱۸ - ۴ \times ۳۲ = ۱۹۶$$

$$x', x'' = \frac{۱۸ \pm \sqrt{۱۹۶}}{۲} = \begin{cases} ۲ \\ ۱۶ \end{cases}$$

$$\Delta' = ۹ \times ۹ - ۳۲ = ۴۹$$

$$x', x'' = \frac{۹ \pm \sqrt{۴۹}}{۱} = \begin{cases} ۲ \\ ۱۶ \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که روش دوم بسیار ساده‌تر است. جواب‌ها نیز عیناً یکی است. اگر جمع ضرایب یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برابر با صفر باشد، یکی از جواب‌ها ۱ است و جواب دیگر، برابر با $\frac{c}{a}$ است.

$$a + b + c = ۰$$

در چنین حالتی $ax^{۲} + bx + c$ بر $x - ۱$ قابل قسمت است. اگر $ax^{۲} + bx + c$ را بر

$x-1$ تقسیم نماییم، مانده صفر است و خارج‌قسمت آن

$$ax-c=0$$

درنتیجه

$$x=\frac{c}{a}$$

**مثال ۱۱ــ** جواب معادله‌ی زیر را محاسبه کنید.

$$2x^2-3x+1=0$$

$$2-3+1=3-3=0$$

پس

$$x'=1 \qquad x''=\frac{1}{2}$$

**۳ــ۱ــ۶ جمع و ضرب جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم:** اگر جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم را با هم جمع و یا در هم ضرب کنیم، نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مجموع ریشه‌ها

$$x'+x''=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}=S$$

$$x'\times x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها

$$x'\times x''=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}=P$$

با دانستن روابط بین ریشه‌ها به این نکته توجّه کنید.

$$ax^2+bx+c=0$$

طرفین را بر a، که مخالف صفر است، تقسیم می‌کنیم.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2-(\frac{-b}{a})x+\frac{c}{a}=0$$

$$\frac{c}{a}=P \quad \text{و} \quad \frac{-b}{a}=S \qquad x^2-Sx+P=0$$

$\frac{c}{a}$ برابر با حاصل ضرب ریشه‌ها و $\frac{-b}{a}$ برابر با حاصل جمع ریشه‌هاست.

**مثال ۱۲ــ** معادله‌ای بنویسید که مجموع ریشه‌های آن ۵ و حاصل ضرب ریشه‌های آن ۴ باشد.

$$x^۲ - Sx + P = ۰$$
$$x^۲ - ۵x + ۴ = ۰$$
$$\Delta = ۲۵ - ۱۶ = ۹$$
$$x', x'' = \frac{۵ \pm ۳}{۲} = \begin{cases} ۴ \\ ۱ \end{cases}$$

گاهی اوقات لازم است که سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c$ را به حاصل‌ضرب عوامل تجزیه کنیم. برای این عمل، کافی است از فرمول زیر استفاده کنیم.

$$ax^۲ + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$۲x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$$

**مثال ۱۳ــ** معادله را به حاصل‌ضرب عوامل تبدیل کنید.

$$\Delta' = ۹ - ۸ = ۱$$
$$x', x'' = \frac{۳ \pm ۱}{۲} = \begin{cases} ۲ \\ ۱ \end{cases}$$
$$ax^۲ + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$
$$۲x^۲ - ۶x + ۴ = ۲(x - ۱)(x - ۲)$$

## ۲ــ۶ کاربردهای معادلات درجه‌ی دوم

معادلات درجه‌ی دوم، کاربردهای زیادی دارند، از جمله در محاسبات مجهولات. معمولاً حل معادلات درجه‌ی دوم برای دانش‌آموزان بسیار ساده است، ولی گاهی تبدیل کردن صورت مسئله به معادله اندکی مشکل به نظر می‌رسد. برای حل این مشکل، باید به مثال‌های زیر توجّه کرد و تمرین‌های پایان فصل را به‌دقّت انجام داد.

**مثال ۱۴ــ** برای ساختن قوطی، یک ورق مقوّا به‌شکل مربع و به‌ضلع ۵ سانتی‌متر در اختیار داریم. امّا این مقوا جواب‌گوی نیاز ما نیست و لازم است ۲۴ سانتی‌متر مربع به سطح آن افزوده شود. تعیین کنید به اندازه‌ی هر ضلع مربع چه‌قدر باید اضافه کرد تا مربّعی به دست آید که اختلاف مساحت آن با مساحت فعلی ۲۴ سانتی‌متر مربّع باشد.

مساحت مقوّای فعلی $\qquad ۵ \times ۵ = ۲۵$

اگر طول ضلع مربّع جدید را $(x + ۵)$ فرض کنیم، مساحت آن $(x + ۵)(x + ۵)$ است. پس،

$$(x + ۵)(x + ۵) = ۲۵ + ۲۴$$

$$x^{۲}+۲۵+۱۰x=۴۹$$

$$x^{۲}+۱۰x-۲۴=۰$$

$$\Delta'=۲۵+۲۴=۴۹$$

$$x',x''=\frac{-۵\pm ۷}{۱}=\begin{cases}۲\\ -۱۲\end{cases}$$

روشن است که جواب ۱۲− پذیرفتنی نیست و فقط $x=۲$ قابل قبول است.

**مثال ۱۵ـ** اگر معادلات عرضه و تقاضای کالایی به شکل زیر باشد، درحالت تعادل مقدار و قیمت کالا را تعیین کنید. x نشانگر مقدار کالا وy نشانگر قیمت آن است.

$$\begin{cases}(x+۱۲)(y+۶)=۱۶۹\\ x-y+۶=۰\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم داریم $y=x+۶$

در معادله‌ی اوّل قرار می‌دهیم $(x+۱۲)(x+۶+۶)=۱۶۹$

$$(x+۱۲)(x+۱۲)=۱۶۹$$

$$x^{۲}+۲۴x+۱۴۴=۱۶۹$$

$$x^{۲}+۲۴x-۲۵۰=۰$$

$$\Delta'=۱۴۴+۲۵=۱۶۹$$

$$x',x''=\frac{-۱۲\pm ۱۳}{۱}=\begin{cases}۱\\ -۲۵\end{cases}$$

چون قیمت و مقدار نمی‌تواند منفی باشد $x=۱ \Rightarrow y=۷$

پس، فقط جواب ۷ برای قیمت $x=-۲۵ \Rightarrow y=-۱۹$

و ۱ برای مقدار کالا مورد قبول است و نقطه‌ی تعادل (۷و۱) است.

**مثال ۱۶ـ** مساحت میدان دایره شکلی، ۳۱۴ مترمربع است. بنا به دلایلی، لازم است این میدان سه برابر بزرگ‌تر از وضع فعلی گردد. معین کنید شعاع میدان چه‌قدر باید بیش‌تر بشود.

$$۳۱۴\div ۳/۱۴=۱۰۰$$

$$\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

پس، شعاع فعلی میدان ۱۰متر است ؛ لذا شعاع میدان جدید $x+۱۰$ فرض می‌شود. پس،

$$(x+۱۰)(x+۱۰)\times ۳/۱۴=۳۱۴+۳\times ۳۱۴$$

$$(x^{۲}+۲۰x+۱۰۰)\times ۳/۱۴=۳۱۴\times ۴$$

$$x^۲+۲۰x+۱۰۰=۴۰۰$$
$$x^۲+۲۰x-۳۰۰=۰$$
$$\Delta'=۱۰۰+۳۰۰=۴۰۰$$
$$x',x''=\frac{-۱۰\pm۲۰}{۱}=\Big<\begin{matrix}۱۰\\-۳۰\end{matrix}$$
$$۱۰+۱۰=۲۰$$

واضح است که ۳۰- پذیرفتنی نیست و $x=۱۰$ قابل‌قبول است. یعنی شعاع دایره باید دو برابر گردد تا مساحت میدان چهار برابر وضع فعلی شود.

**مثال ۱۷ـــ** رابطه‌ی درآمد کلّ یک مؤسّسه با تعداد تولید آن

$$y=-x^۲+۹x$$

است، که در آن y درآمد کلّ ناخالص به میلیون ریال ماهانه است و x تعداد تولید کالا به میلیون واحد در ماه است. اگر این مؤسّسه بخواهد در ماه، درآمدی کلّی برابر با ۸میلیون ریال داشته باشد، چه تعداد کالا باید تولید نماید؟

$$y=-x^۲+۹x$$
$$۸=-x^۲+۹x$$
$$-x^۲+۹x-۸=۰$$
$$\Delta=۹^۲-۴\times۸=۸۱-۳۲=۴۹$$
$$x'=\frac{-۹+۷}{-۲}=\frac{-۲}{-۲}=۱\ ,\ \ x''=\frac{-۹-۷}{-۲}=+۸$$

اگر چه از نظر ریاضی جواب ۸ میلیون و یک میلیون، یک درآمد مشخّصی را برای مؤسّسه ایجاد می‌کند، ولی از نظر اقتصادی باید با جواب کم‌تر، یعنی یک میلیون واحد تولید نمود.

**مثال ۱۸ـــ** اگر x مقدار کالا به تُن و y قیمت کالا به هزار ریال را نشان دهد مقدار و قیمت تعادل برای معادلات عرضه و تقاضای زیر را پیدا کنید.

$$x^۲+۵x-y+۱=۰$$
$$۲x^۲+y-۹=۰$$
$$\begin{cases}y=x^۲+۵x+۱\\y=-۲x^۲+۹\end{cases}$$

$$x^۲+۵x+۱=-۲x^۲+۹$$

$$۲x^۲+x^۲+۵x+۱=۲x^۲-۲x^۲+۹$$

$$۳x^۲+۵x+۱=۹$$

$$۳x^۲+۵x+۱-۹=۹-۹$$

$$۳x^۲+۵x-۸=۰$$

$$\Delta=۲۵+۹۶=۱۲۱$$

$$x=\frac{-۵\pm\sqrt{۱۲۱}}{۶}=\begin{cases} x'=۱ \\ x''=\frac{-۸}{۳} \end{cases}$$

با توجه به این‌که در این‌گونه مسائل فقط آن قسمت از معادلات قابل‌قبول است که در ربع اوّل واقع شده باشد، پس فقط جواب $x=۱$ قابل‌قبول است و $x=\frac{-۸}{۳}$ قابل‌قبول نیست.

پس

$$y=-۲x^۲+۹$$

$$y=-۲+۹=۷$$

$$y=۷$$

یعنی قیمت ۷ هزار ریال و مقدار ۱ تُن قابل‌قبول است.

**مثال ۱۹ــ** اگر $x$ مقدار کالا به تُن و $y$ قیمت کالا به هزار ریال را نشان دهد، مقدار و قیمت تعادل برای معادلات عرضه و تقاضای زیر را پیدا کنید.

$$(x+۱۲)(y+۶)=۱۶۹$$

$$x-y+۶=۰$$

$$y=x+۶$$

$$(x+۱۲)(x+۶+۶)=۱۶۹$$

$$(x+۱۲)(x+۱۲)=۱۶۹$$

$$x^۲+۱۴۴+۲۴x=۱۶۹$$

$$x^۲+۲۴x+۱۴۴-۱۶۹=۱۶۹-۱۶۹$$

$$x^۲+۲۴x-۲۵=۰$$

چون جمع ضرایب صفر است

$$(x-۱)(x+۲۵)=۰$$

$$x' = ۱ \qquad x'' = -۲۵$$

پس فقط $x = ۱$ قابل‌قبول است.

$$y = x + ۶$$

$$y = ۱ + ۶$$

$$y = ۷$$

یعنی قیمت **۷** هزار ریال و مقدار **۱** تُن قابل‌قبول است.

**مثال ۲۰ــ** اگر x مقدار کالا به تُن و y قیمت کالا به هزار ریال را نشان دهد، مقدار و قیمت تعادل برای معادلات عرضه و تقاضای زیر را پیدا کنید.

$$۲x + y - ۱۰ = ۰$$

$$y^۲ - ۸x - ۴ = ۰$$

$$y = -۲x + ۱۰$$

$$(-۲x + ۱۰)^۲ - ۸x - ۴ = ۰$$

$$۴x^۲ + ۱۰۰ - ۴۰x - ۸x - ۴ = ۰$$

$$۴x^۲ - ۴۸x + ۹۶ = ۰$$

$$x^۲ - ۱۲x + ۲۴ = ۰$$

$$x = \frac{۶ \pm \sqrt{۶ \times ۶ - ۲۴ \times ۱}}{۱} = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶ - ۲۴}}{۱} = ۶ \pm \sqrt{۱۲}$$

$$x = ۶ \pm ۲\sqrt{۳}$$

ظاهراً هر دو جواب قابل‌قبول است.

حال باید y را بررسی نمود

$$x = ۶ + ۲\sqrt{۳}$$

$$y = -۲(۶ + ۲\sqrt{۳}) + ۱۰$$

$$y = -۱۲ - ۴\sqrt{۳} + ۱۰$$

$$y = -۲ - ۴\sqrt{۳}$$

این جواب قابل‌قبول نیست

$$x = ۶ - ۲\sqrt{۳} \approx ۲/۵$$

$$y = -2(6 - 2\sqrt{3}) + 10$$

$$y = -12 + 4\sqrt{3} + 10$$

$$y = -2 + 4\sqrt{3} \approx 4/9$$

این جواب قابل‌قبول است

پس $x \approx 2/5$ و $y \approx 4/9$ قابل‌قبول است.

## تمرین‌های فصل ششم

۱ـ معادلات زیر را حل نمایید و درصورتی که جواب دارند، جواب را مشخّص کنید.

$$11x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$3x^2 + 6x - 11 = 0$$

$$7x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$x^2 + x + 7 = 0$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

۲ـ بدون حل معادلات، حاصل جمع و حاصل ضرب جواب‌های معادلات دارای جواب تمرین ۱ را محاسبه، سپس با جواب‌ها مقایسه کنید.

۳ ـ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی ۷۲ است، آن دو عدد را پیدا کنید.

۴ـ مجموع مربّعات سه عدد صحیح متوالی ۱۱۰ است. آن اعداد را تعیین کنید.

۵ـ آن چه عددی است که اگر ۳۵واحد به دو برابر آن افزوده شود، حاصل برابر با مربّع همان عدد گردد؟

۶ـ مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ است و رقم دهگان آن ۴واحد بیش‌تر از مربع رقم یکان آن است. آن عدد را پیدا کنید.

۷ـ رابطه‌ی امکانات تولید برای یک مؤسسه، به این ترتیب است $9y + x^2 = 225$

این مؤسسه با داشتن امکانات تولیدی ثابت می‌تواند کالای x یا کالای y یا ترکیبی از هردو را تولید

نماید. مقادیر کالا برحسب واحد تُن است. تعیین کنید اگر این مؤسّسه بخواهد از کالای y، ۱۶ تُن تولید نماید، قادر به تولید چند تُن از کالای x خواهد بود؟

۸ــ رابطه‌ی عرضه‌ی کالایی $y = ۲x^۲ - ۴x + ۲$ است که در آن y قیمت به هزار ریال و x مقدار کالا به میلیون کیلو در ماه است. تعیین کنید در قیمت ۸ هزار ریال، چه مقدار کالا به بازار عرضه می‌گردد؟

۹ــ رابطه‌ی هزینه‌ی کلّ (هزینه‌ی ثابت به‌علاوه‌ی هزینه‌ی متغیّر) یک بنگاه تولیدی $y = \frac{۱}{۱۰}x^۲ + ۶x + ۲۰۰$ است که در آن y هزینه‌ی کل به ده هزار ریال و x مقدار کالا به تُن است. تعیین کنید وقتی هزینه‌ی کل بنگاه برابر ۶ میلیون ریال باشد، مقدار تولید بنگاه چه‌قدر است؟

۱۰ــ رابطه‌ی هزینه کل یک شرکت تولیدی گچ پاکتی $y = \frac{۱}{۵}x^۲ + ۲x + ۳$ است. اگر y هزینه‌ی کل به ده هزار ریال و x مقدار گچ تولیدی به تُن باشد، تعیین کنید زمانی که هزینه‌ی کل کارخانه ۱۸۰,۰۰۰ ریال باشد مقدار تولید چه مقدار است؟

۱۱ــ رابطه‌ی درآمد کل یک شرکت با تعداد تولید آن به‌صورت $y = -x^۲ + ۶x$ است، که در آن y درآمد کل به میلیون ریال و x تعداد تولید کالا به میلیون واحد است. اگر مدیر شرکت بخواهد درآمدی کلی، برابر با ۹ میلیون ریال داشته باشد، چه تعداد کالا باید تولید نماید؟

۱۲ــ اگر رابطه‌ی هزینه‌ی کل شرکتی $y = x^۲ - ۳x + ۷$ باشد (y هزینه‌ی کل به میلیون ریال و x تعداد تولید است)، چه تعداد کالا باید تولید گردد تا هزینه‌ی شرکت ۵ میلیون ریال باشد؟

۱۳ــ رابطه‌ی درآمد شرکتی $T_R = ۲۰x - ۵x^۲$ و رابطه‌ی هزینه‌ی کل آن شرکت $Tc = ۱۰x + ۶x^۲$ است. درصورتی‌که شرکت با زیان یک میلیون ریالی مواجه باشد، مقدار تولید را به میلیون واحد تعیین کنید.

۱۴ــ رابطه‌ی هزینه‌ی کل شرکتی $Tc = ۳x^۲ + ۲۰x - ۵۰$ و رابطه درآمد کل آن شرکت $T_R = ۳۰x - x^۲$ است. مطلوب است تعداد تولید در نقطه‌ی سربه‌سر.

۱۵ــ محیط مغازه‌ای به شکل مستطیل ۳۴ متر و مساحت آن برابر با ۶۰ مترمربع است. طول و عرض این مغازه را محاسبه نمایید.

۱۶ــ اندازه‌ی ضلع انبار مربع شکلی ۱۰ متر است. مساحت آن کافی نیست و نیاز است که اضلاع مربع از هر طرف به یک اندازه افزایش یابد تا در کل، ۴۴ مترمربع به سطح آن افزوده گردد. مقدار افزایش از هر طرف را محاسبه کنید.

# فصل هفتم

## ماتریس و دترمینان

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ ماتریس، انواع وکاربردهای آن را بیان کند و جبر ماتریس‌ها را نشان دهد.

۲ــ جمع ماتریس‌ها، خصوصیّات آن‌ها، ضرب ماتریس در عدد و کاربرد آن را توضیح دهد.

۳ ــ ضرب ماتریس‌ها و کاربرد آن‌را انجام دهد.

۴ــ دترمینان را تعریف و مقدار آن‌را محاسبه کند و خواصّ آن‌را توضیح دهد.

۵ ــ معکوس ماتریس دو در دو و سه در سه و کاربرد آن‌را در مسائل انجام دهد.

## ۷ــ ماتریس و دترمینان

**مقدمه**

برای فهم ساده‌تر ریاضیّات ، گاهی از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌شود. از آن‌جمله ماتریس است که به ما در حلّ بسیاری از مشکلات کمک کند.

مثلاً برای به حداکثر رساندن سود یک شرکت، با توجه به محدودیت‌هایی، مثل نیروی انسانی،ساعت کار،اعتبارات بانکی،مواد اولیه،عرضه و تقاضا، می‌توان از ماتریس استفاده کرد یا برای به حداقل رساندن هزینه‌ی یک بیمارستان یا یک مؤسسه دولتی ماتریس و معکوس ماتریس به‌کار می‌رود. امروزه در اکثر بنگاه‌های خصوصی و دولتی از برنامه‌ریزی خطی، سیمپلکس، ماتریس تصمیم‌گیری و مدل شبکه، مدل تخصیصی کار و حمل و نقل، که الفبای همه‌ی آن‌ها ماتریس است، استفاده فراوان می‌گردد.

برای مثال، فرض کنید شرکت نفت ایران سه انبار در محل‌های A، B و C دارد و سه پمپ بنزین باید از طریق این انبارها تغذیه شوند. اگر $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ پمپ‌های بنزین باشند و فاصله‌ی آن‌ها تا انبارهای مزبور به‌شرح زیر باشد :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاصله‌ی | A | تا | $P_۱$ | ۴۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | A | تا | $P_۲$ | ۲۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | A | تا | $P_۳$ | ۲۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | B | تا | $P_۱$ | ۳۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | B | تا | $P_۲$ | ۱۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | B | تا | $P_۳$ | ۳۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | C | تا | $P_۱$ | ۱۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | C | تا | $P_۲$ | ۳۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | C | تا | $P_۳$ | ۴۵ | کیلومتر است |

این اطلاعات را می‌توانیم در کروشه‌ای به‌این شکل نشان دهیم. در بعضی از کتاب‌ها به‌جای کروشه از پرانتز هم استفاده می‌گردد.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_۱ & P_۲ & P_۳ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۴۰ & ۲۵ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۱۵ & ۳۵ \\ ۱۵ & ۳۰ & ۴۵ \end{bmatrix} \end{array}$$

محلّ تلاقی خطوط افقی و قایم، فاصله‌ی انبار تا پمپ بنزین را نشان می‌دهد.

این آرایه‌ی اعداد مثالی از یک ماتریس است. به آرایه‌ای از اعداد در شکل زیر دقّت کنید. هرکدام از این آرایه‌ها را یک ماتریس می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

نام هر ماتریس را با حروف بزرگ الفبای لاتین نشان می‌دهند مانند ماتریس A، B،C، D، E و . . . .

## ۱ــ۷ سطر یک ماتریس

هریک از اعداد داخل کروشه را یک درایه‌ی یا یک عضو ماتریس می‌نامند.

درایه‌هایی را که در امتداد یک خطّ افقی قرار گیرند، یک سطر ماتریس می‌نامند. مانند ۶، ۵، ۲، یا ۱، ۲، ۰ یا ۳، ۰، ۱ در ماتریس A.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

## ۲ــ۷ ستون یک ماتریس

درایه‌هایی را، که در امتداد یک خطّ قایم قرار گیرند، یک ستون ماتریس می‌نامند، مانند $\begin{smallmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{smallmatrix}$ یا $\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۰ \end{smallmatrix}$ یا $\begin{smallmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۳ \end{smallmatrix}$ در همان ماتریس A.

بنابراین، این ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

بدیهی است ۶، ۵، ۲ را سطر اوّل، ۱، ۲، ۰ را سطر دوم و ۳، ۰، ۱ را سطر سومِ ماتریس می‌نامند.

هم‌چنین $\begin{smallmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{smallmatrix}$ را ستون اوّل، $\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۰ \end{smallmatrix}$ را ستون دوم و $\begin{smallmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۳ \end{smallmatrix}$ را ستون سوم می‌نامند.

به ماتریسی مانند A، که m سطر و n ستون داشته باشد، یک ماتریس m در n گفته می‌شود و آن‌را به‌صورت $A_{m\times n}$ نشان می‌دهند.

مثال ۱ـــ ماتریس

$$A = \begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{سطر اوّل} \\ \text{سطر دوم} \end{array} & \begin{bmatrix} ۲ & ۷ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \end{array}$$

را یک ماتریس ۲ در ۳ می‌نامند. $A_{۲\times۳}$

مثال۲ـــ ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس یک در چهار است. $B_{۱\times۴}$

## ۳ـــ۷ آدرس درایه

هر درایه معمولاً با حرف کوچک الفبای لاتین نشان داده می‌شود.

به‌علاوه آدرس هر درایه را به‌صورت اندیس در کنار آن می‌نویسیم.

رقم سمت چپ نشان‌دهنده‌ی سطر درایه و رقم سمت راست آن نشان‌دهنده‌ی ستون درایه است. به‌عبارت دیگر آدرس هر درایه عبارت است از سطر و ستونی که آن درایه در ماتریس دارد.

**مثال ۳ـــ** در ماتریس A، که یک ماتریس ۳ × ۲ است، آدرس درایه‌ی ۳ را مشخّص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \qquad a_{۱۲} = ۳$$

به‌طورکلّی، هر درایه به‌صورت $a_{ij}$ نشان‌داده می‌شود که نشان‌دهنده‌ی درایه‌ی سطر iام و ستون jام ماتریس است.

i و j از اعداد طبیعی هستند.

## ۴ـــ۷ قطر اصلی ماتریس مربّع

اگر در یک ماتریس، در درایه‌هایی که در آن i=j باشد دقّت کنیم، مشخّص می‌شود که همگی این درایه‌ها روی یک خط راست قرار گرفته‌اند و آن را قطر اصلی ماتریس مربع می‌نامند.

مثال ۴ ـــ در ماتریس مربّع ۴×۴

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$a_{11}$ ، $a_{22}$ ، $a_{33}$ و $a_{44}$ قطر اصلی را تشکیل می‌دهند که به ترتیب عبارت‌اند از : ۱، ۲، ۲و۳.

**توضیح** : دو درایه از دو ماتریس را زمانی متناظر گویند که آدرس آن‌ها (محل سطر و ستون) یکی باشد.

## ۵ــ۷ انواع ماتریس‌ها

**۱ــ۵ــ۷ ماتریس صفر:** به ماتریسی که کلیّه درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر گویند.

**مثال ۵ــ** ماتریس A و B و C نمونه‌ای از ماتریس صفر هستند.

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

**۲ــ۵ــ۷ ماتریس مربع:** اگردر یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $m=n$ ، این ماتریس را ماتریس مربّع مرتبه n یا m گویند. به عبارت دیگر، ماتریس مربع ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند.

**مثال ۶ــ** ماتریس $C_{2\times 2}$ یک ماتریس مربّع است.

$$C=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$$

**مثال ۷ــ** ماتریس $D_{3\times 3}$ یک ماتریس مربّع است.

$$D=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

**۳ــ۵ــ ۷ ماتریس سطری:** اگر در یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $m=1$ ، این ماتریس را ماتریس سطری می‌نامند.

**مثال ۸ــ** ماتریس E را یک ماتریس سطری گویند.

$$E=\begin{bmatrix}1&5\end{bmatrix}$$

**۴ــ۵ــ۷ ماتریس ستونی:** اگر در یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $n=1$ ، این ماتریس را ماتریس ستونی می‌نامند.

**مثال ۹ــ** ماتریس F را یک ماتریس ستونی می‌نامند.

$$F=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\5\end{bmatrix}$$

**۷ــ۵ــ۵ ماتریس بالا مثلثی:** به ماتریس مربعی که در آن کلیه‌ی درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشند ماتریس بالا مثلثی می‌گویند.

**مثال ۱۰ ــ** ماتریس M را یک ماتریس بالامثلثی گویند.

$$M=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۶ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

**۷ــ۵ــ۶ ماتریس پایین مثلثی:** به ماتریس مربعی که در آن کلیه‌ی درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشند ماتریس پایین مثلثی گویند.

**مثال ۱۱ ــ** ماتریس N را یک ماتریس پایین مثلثی گویند.

$$N=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

**۷ــ۵ــ۷ ماتریس قطری:** به ماتریس مربّعی که درایه‌های آن به‌جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشند، ماتریس قطری گویند، مانند ماتریس B.

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

**۷ــ۵ــ۸ ماتریس واحد:** یک ماتریس قطری است که کلیه درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشد. به ماتریس واحد، ماتریس یکانی نیز گفته می‌شود. معمولاً ماتریس واحد (یکانی) را با $I_n$ نشان می‌دهند که در آن n تعداد سطرها یا ستون‌های ماتریس است، مانند ماتریس $I_۳$.

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

## ۷ــ۶ ماتریس ترانهاده یا برگردان

هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس مانند A را با هم عوض کنیم ماتریس جدیدی به‌دست می‌آید که آن را ماتریس ترانهاده‌ی ماتریس A می‌نامند و به صورت $(A^t)$ یا $A)$ نمایش داده می‌شود.

**مثال ۱۲ ــ** ترانهاده یا برگردان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۸ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

$$A' \text{ (یا) } A^t = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۸ \\ ۱ & ۷ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

## ۷ــ۷ دو ماتریس مساوی

دو ماتریس را زمانی مساوی یکدیگر گویند که اولاً تعداد سطرها، ثانیاً تعداد ستون‌ها، ثالثاً درایه‌های متناظر هر دو ماتریس مساوی باشند، یعنی $a_{۱۱} = b_{۱۱}$ و $a_{۱۲} = b_{۱۲}$ و $a_{۲۲} = b_{۲۲}$ و $a_{۲۱} = b_{۲۱}$ و . . . .

**مثال ۱۳ ــ** دو ماتریس A و B با هم مساوی هستند ؛ زیرا

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۳} & \frac{۶}{۳} \\ \frac{۹}{۳} & ۲\times۲ \end{bmatrix}$$

هر دو ماتریس ۲×۲ می‌باشند و درایه‌های متناظر با هم مساوی هستند.

$$۱ = \frac{۳}{۳} \qquad ۲ = \frac{۶}{۳}$$

$$۳ = \frac{۹}{۳} \qquad ۴ = ۲\times۲$$

## ۸ــ۷ جمع ماتریس‌ها

باید توجّه داشت دو ماتریس درصورتی می‌توانند با هم جمع شوند که تعداد سطرها و ستون‌های هر دو با هم مساوی باشند. درغیر این‌صورت، نمی‌توان آن‌ها را با هم جمع نمود.

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

حاصل مجموع دو ماتریس، خود یک ماتریس است.

**مثال ۱۴ ــ** ماتریس A ، که دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، با ماتریس B که آن نیز دارای

۲سطر و ۳ ستون است، قابل جمع کردن هستند، ولی ماتریس A با C را نمی‌توان جمع نمود، زیرا ماتریس C، دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

اگر دو ماتریس A و B، $m\times n$ باشند، مجموع آن‌ها نیز یک ماتریس $m\times n$ مانند C است، به‌طوری که هر درایه‌ی آن مساوی مجموع درایه‌های متناظرش در A و B است.

**مثال ۱۵ ــ** مجموع دو ماتریس A و B را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} , \quad A+B=\begin{bmatrix} ۱+۳ & ۲+۱ & ۳+۲ \\ ۲+۱ & ۰+۰ & ۱+۲ \end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس ۳×۲ می‌باشند، پس جمع آن‌ها شدنی است و نتیجه، ماتریس C می‌شود که یک ماتریس ۳×۲ است.

$$C=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

**مثال ۱۶ــ** شرکتی انواع کولر را با حجم‌های کوچک، متوسّط و بزرگ در مدل‌های عادی و لوکس تولید می‌نماید. اگر تولید آن در شش ماهه‌ی اوّل و دوم سال به‌ترتیب جدول زیر باشد، تعیین کنید شرکت در یک‌سال چند کولر با حجم‌ها و انواع مختلف تولید می‌کند.

| | شش ماهه‌ی اوّل | | شش ماهه‌ی دوم | |
|---|---|---|---|---|
| **حجم کولر** | **نوع عادی** | **نوع لوکس** | **نوع عادی** | **نوع لوکس** |
| کوچک | ۲۷۰۰ | ۲۰۰۰ | ۱۴۰۰ | ۱۶۰۰ |
| متوسط | ۴۳۰۰ | ۴۱۰۰ | ۲۱۰۰ | ۲۰۰۰ |
| بزرگ | ۵۲۰۰ | ۱۵۰۰ | ۴۰۰۰ | ۱۱۰۰۰ |

$$A+B=C$$

ماتریس A را تولید در شش‌ماهه‌ی اوّل و ماتریس B را تولید در شش‌ماهه‌ی دوم سال فرض می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}2000 & 2700\\ 4100 & 4300\\ 1500 & 5200\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1600 & 1400\\ 2000 & 2100\\ 1100 & 4000\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}3600 & 4100\\ 6100 & 6400\\ 2600 & 9200\end{bmatrix}$$

درنتیجه ماتریس C، که مجموع A و B است، تولید کولر در یک سال را مشخّص می‌نماید.

**مثال ۱۷ ــ** ماتریس A و B را با هم جمع کنید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

به‌دلیل این‌که تعداد سطر و ستون دو ماتریس با هم یکی نیست، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

## ۹ ــ ۷ ضرب عدد حقیقی درماتریس

اگر k عددی حقیقی و A ماتریس $m\times n$ باشد، حاصل‌ضرب k در A ماتریسی خواهد بود $m\times n$ ، که کلیّه‌ی درایه‌های آن برابر با درایه‌های ماتریس A ضربدر k است.

$$k\times A=k\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix}$$

**مثال ۱۸ــ** اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب عدد ۵ را در A بیابید.

$$5\times A=5\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 0 & 15\end{bmatrix}$$

**مثال ۱۹ــ** فرض کنید فروش فروردین ماه ۳ نوع محصول شرکت ایران خودرو (سمند، پژو۲۰۶ و پارس) در شهر تهران و اصفهان به‌صورت زیر است :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{سمند} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{پارس}\end{array}\\ F= & \begin{bmatrix}110 & 70 & 90\\ 60 & 100 & 140\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{تهران}\\ \text{اصفهان}\end{array}\end{array}$$

اگر پیش‌بینی شود، فروش این شرکت در اردیبهشت ماه ۱۰٪ افزایش یابد، ارقام مربوط به

میزان فروش ماه اردیبهشت این شرکت در ۲ شهر تهران و اصفهان را به‌صورت ماتریس بنویسید.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{فروش اردیبهشت} & \text{فروش فروردین} & \text{۱۰٪ افزایش فروش} \\ F_2 = & F_1 + 0/1F_1 = 1/1F_1 = 1/1 & & & \end{array}\begin{bmatrix} 110 & 70 & 90 \\ 60 & 100 & 140 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{سمند} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{پارس} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 121 & 77 & 99 \\ 66 & 110 & 154 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{تهران} \\ \text{اصفهان} \end{array}$$

## ۱۰ــ۷ ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

برای درک بهتر موضوع به مثال زیر توجّه کنید.

**مثال ۲۰ــ** درسال گذشته، شرکتی سه نوع کولر رومیزی، آبی و گازی را به تعداد ۵,۰۰۰، ۴,۰۰۰ و ۳,۰۰۰ به‌فروش رسانده است. اگر قیمت هر دستگاه کولر به‌ترتیب برابر با ۱۴۰,۰۰۰، ۲۵۰,۰۰۰ و ۳۰۰,۰۰۰ ریال باشد، فروش شرکت را در سال قبل تعیین کنید.

تعداد کولرها را می‌توان با یک ماتریس سطری A نمایش داد.

$$A_{1\times 3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{رومیزی} & \text{آبی} & \text{گازی} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5{,}000 & 4{,}000 & 3{,}000 \end{bmatrix} \end{array}.$$

هم‌چنین، بهای فروش هر دستگاه را می‌توان با یک ماتریس ستونی نشان داد.

$$B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 140{,}000 \\ 250{,}000 \\ 300{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{بهای کولر رومیزی} \\ \text{بهای کولر آبی} \\ \text{بهای کولر گازی} \end{array}$$

حاصل ضرب این دو ماتریس برابر است با :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5{,}000 & 4{,}000 & 3{,}000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 140{,}000 \\ 250{,}000 \\ 300{,}000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5{,}000 \times 140{,}000 + 4{,}000 \times 250{,}000 + 3{,}000 \times 300{,}000 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 700{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000{,}000 + 900{,}000{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}600{,}000{,}000 \end{bmatrix}.$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، اوّلین درایه‌ی ماتریس سطری را در اوّلین درایه‌ی ماتریس ستونی، سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی و بالأخره سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سرانجام حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه، که یک ماتریس ۱×۱ است، به‌دست آید.

دقّت کنید که ضرب یک ماتریس سطری A، در یک ماتریس ستونی B فقط وقتی شدنی است که تعداد ستون‌های ماتریس A مساوی با تعداد سطرهای ماتریس B باشد.

بنابراین، اگر A یک ماتریس $n\times$۱ و B یک ماتریس ۱$\times n$ باشد، برای پیدا کردن حاصل‌ضرب $A\times B$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

اوّلین درایه‌ی ماتریس سطری را در اوّلین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم. پس از آن سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم و بالأخره آخرین درایه‌ی ماتریس سطری را در آخرین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم.

حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه حاصل گردد.

**مثال ۲۱**

$$\underset{۱\times۲}{\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \end{bmatrix}}\underset{۲\times۱}{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}(۲\times۱)+(۳\times۲)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲+۶\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۸\end{bmatrix} = ۸$$

**مثال ۲۲**

$$A\times B = \underset{۱\times۳}{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}}\underset{۲\times۱}{\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}} =$$

چون ماتریس A، ۳×۱ و ماتریس B، ۱×۲ است، لذا ضرب آن‌ها عملی نیست.

## ۱۱ــ۷ ضرب ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس A و B مفروض باشند، تنها شرطی که بتوان ماتریس A را در ماتریس B ضرب نمود $(A\times B)$، این است که تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B باشد.

اگر ماتریس A یک ماتریس $m\times p$ و B یک ماتریس $p\times n$ باشد، برای به‌دست آوردن ماتریس

$A\times B$ که یک ماتریس $m\times n$ خواهد بود به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

اوّلاً، ماتریس B را به n ماتریس ستونی تجزیه می‌کنیم. ثانیاً، ماتریس A را طبق روش قبلی در هریک از این ماتریس‌های ستونی ضرب می‌نماییم. ثالثاً، ضرب‌های به‌دست آمده را که به‌صورت ماتریس‌های ستونی هستند از چپ به راست ستون‌های اوّل تا nام ماتریس حاصل‌ضرب قرار می‌دهیم.

**مثال ۲۳ــ** حاصل‌ضرب $A\times B$ را پیدا کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times۲+۲\times۴ & ۱\times۳+۲\times۱ \\ ۳\times۲+۴\times۴ & ۳\times۳+۴\times۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۵ \\ ۲۲ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس $۲\times۲$ هستند، پس ضرب آن‌ها شدنی است ونتیجه، یک ماتریس $۲\times۲$ خواهد بود.

در این مثال می‌توان $B\times A$ را محاسبه نمود. چون هر دو ماتریس $۲\times۲$ هستند.

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A\times B \neq B\times A$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times۱+۳\times۳ & ۲\times۲+۳\times۴ \\ ۴\times۱+۱\times۳ & ۴\times۲+۱\times۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ ۷ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۵ \\ ۲۲ & ۱۳ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ ۷ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود حاصل‌ضرب $A\times B$ با $B\times A$ برابر نیست.

**مثال ۲۴ــ** دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ مفروض است. حاصل‌ضرب $A\times B$ را پیدا کنید.

چون تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B است، پس این ضرب شدنی است.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

زیرا $۲=۲$ $\qquad$ $(۲\times۲)\quad ۲\times۳$

ستون اوّل حاصل‌ضرب $\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲\times۱+۳\times۲ \\ ۰\times۱+۵\times۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۸ \\ ۱۰ \end{pmatrix}$

ستون دوم حاصل‌ضرب $\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲\times۳+۳\times۴ \\ ۰\times۳+۵\times۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۸ \\ ۲۰ \end{pmatrix}$

ستون سوم حاصل‌ضرب $\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۵ \\ ۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲\times۵+۳\times۶ \\ ۰\times۵+۵\times۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲۸ \\ ۳۰ \end{pmatrix}$

به‌طورخلاصه $A \times B = \begin{pmatrix} ۸ & ۱۸ & ۲۸ \\ ۱۰ & ۲۰ & ۳۰ \end{pmatrix}$

دقّت کنید که در این مثال $B \times A$ را نمی‌توان محاسبه نمود ؛ زیرا

$$B \times A = \underset{۲\times۳}{\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{pmatrix}} \times \underset{۲\times۲}{\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{pmatrix}}$$

۲ . ۳

## ۱۲ــ۷ تفریق ماتریس‌ها

تفریق ماتریس‌ها نیز مانند جمع آن‌هاست، با درنظر گرفتن این مطلب که تفریق حالت خاصی از جمع است، لذا برای انجام عمل تفریق $A - B$ ، که در آن $A$ و $B$ دو ماتریس هم مرتبه‌ی دل‌خواه‌اند، در ابتدا تمام اعضای ماتریس $B$ را در ۱− ضرب می‌کنیم و سپس عمل جمع $A + (-B)$ را انجام می‌دهیم.

**مثال ۲۵ــ** اگر

$$A = \begin{pmatrix} ۵ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

و

$$B = \begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

باشد، آن‌گاه $A - B$ را محاسبه کنید.

$$(-۱) \times B = -B = \begin{pmatrix} -۳ & -۲ & -۳ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{pmatrix}$$

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -2 & -3\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5-3 & 3-2 & 2-3\\ 0-2 & 1-1 & 4-3\end{bmatrix}\qquad A-B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

## ۱۳ــ۷ دترمینان

فقط برای ماتریس مربّع می‌توان عددی به‌نام دترمینان به‌دست آورد و برای ماتریس‌هایی که سطر و ستون آن‌ها مساوی نباشد، محاسبه‌ی دترمینان امکان ندارد. دترمینان ماتریس مربّع $A$، که $n\times n$ است، به‌صورت $|A|$ نمایش داده می‌شود. اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ یک ماتریس $2\times 2$ باشد، عدد حقیقی $|A|$ برابر با $ad-bc$ را دترمینان ماتریس $A$ می‌نامیم.

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

اگر $A$ یک ماتریس $3\times 3$ باشد، دترمینان $A$ را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=a\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}$$

روشن است که برای محاسبه‌ی دترمینان، ابتدا درایه‌ی $a_{11}$ را در دترمینان ماتریس $A$ با حذف سطر اوّل و ستون اوّل آن ضرب می‌کنیم. سپس، منفی درایه‌ی $a_{12}$ را در دترمینان ماتریس $A$، با حذف سطر اوّل و ستون دوم آن ضرب می‌کنیم و بالأخره درایه‌ی $a_{13}$ را در دترمینان ماتریس $A$، با حذف سطر اوّل و ستون سوم آن ضرب می‌نماییم تا از حاصل جمع این سه‌عدد، دترمینان $A$ به‌دست آید.

$$|A|=a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

$$=aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg$$

**مثال ۲۶ــ** دترمینان ماتریس A را به‌دست آورید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \times (6-0) - 3 \times (4-1) + 2 \times (0-3) = 6 - 9 - 6 = -9$$

اگر A یک ماتریس $4 \times 4$ باشد، برای پیدا کردن دترمینان A با توجّه به مطالبی که گفته شد، به‌شرح زیر عمل می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} +$$

$$c \times \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \times \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

دقت کنید که علامت ضریب $a_{ij}$ با استفاده از دستور $(-1)^{i+j}$ به‌دست آمده است.

به‌طورکلّی، برای پیدا کردن دترمینان A، که یک ماتریس $n \times n$ است، به این صورت عمل می‌کنیم.

$$|A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \dot{A}_{ij}$$

در این رابطه $a_{ij}$ عبارت از درایه‌ی یک سطر یا یک ستون از ماتریس A است و $\dot{A}_{ij}$ را هم‌سازه‌ی (کوفاکتور یا زیر ماتریس) درایه‌ی $a_{ij}$ گویند.

بنابراین، دترمینان ماتریس A عبارت است از حاصل‌ضرب داخلی درایه‌ی یک سطر با یک ستون ماتریس A در هم‌سازه‌های $\dot{A}_{ij}$ .

مقدار $\dot{A}_{ij}$ برابر با $(-1)^{i+j}$ ضربدر دترمینان ماتریس حاصل از A با حذف سطر i و ستون jام است.

**مثال ۲۷ــ** دترمینان ماتریس B را که ۴×۴ است، پیدا کنید.

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad |B|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}+0+0$$

سپس دترمینان‌های مرتبه‌ی ۳ را برحسب ستون‌های اوّل آن‌ها بسط می‌دهیم.

$$|B|=(-1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}+(-2)(1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$1(3-0)-2(4+1)=3-10=-7$$

**۱ــ۱۳ــ۷ ماتریس الحاقی:** فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربع $M \times M$ باشد. آن‌گاه بنا بر تعریف، ماتریس الحاقی برای ماتریس مربع A، که با adj.A نمایش داده می‌شود، عبارت است از برگردان ماتریس حاصل از A، به‌طوری که در آن به‌جای عناصرِ $a_{ij}$ ، هم‌سازه‌های آن‌ها یعنی $\dot{A}_{ij}$ قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر ماتریس الحاقی adjA برابر است با برگردان ماتریس مربعی که به‌جای هر عنصر آن $(-1)^{i+j}$ برابر دترمینان زیر ماتریس حاصل از همان عنصر قرار گرفته باشد.

**مثال ۲۸ــ** فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریس الحاقی آن برابر است با

$$\operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{21} & \dot{A}_{31} \\ \dot{A}_{12} & \dot{A}_{22} & \dot{A}_{32} \\ \dot{A}_{13} & \dot{A}_{23} & \dot{A}_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن $\dot{A}_{ij}$ هم‌سازه‌ی $a_{ij}$ است، مثل

$$\dot{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و یا

$$\dot{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**مثال ۲۹ــ** ماتریس الحاقی

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

را به‌دست آورید.

$$\text{adj}A=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**مثال ۳۰ــ** ماتریس الحاقی

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

را به‌دست آورید.

$$\text{adj}A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}A=\begin{bmatrix} -۷ & ۶ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

## ۱۴ــ۷ خواصّ دترمینان‌ها

۱ــ هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس را با یکدیگر عوض کنیم، دترمینان آن ماتریس تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۲ــ از تعویض دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مربّع با یکدیگر، تنها علامت دترمینان آن تغییر می‌یابد.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۳ــ هرگاه دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مساوی باشد، دترمینان آن ماتریس صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

۴ــ هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون یک ماتریس در عددی مانند k ضرب شود، دترمینان آن ماتریس نیز در k ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ ka_۲ & kb_۲ & kc_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۵ ــ هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد، دترمینان آن برابر صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \end{vmatrix} = ۰$$

۶ــ هرگاه به سطر (یا ستون) یک ماتریس، مضرب‌هایی از سطرهای دیگر (یا از ستون‌های دیگر) اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس قبلی مساوی است.

**مرتبه‌ی یک ماتریس مربع:** به تعداد سطرها یا ستون‌های یک ماتریس مربّع، مرتبه‌ی ماتریس نیز می‌گویند.

۷ــ هرگاه A و B دو ماتریس مربّع هم مرتبه باشند، داریم :

$$|A.B| = |A|.|B|$$

یعنی دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس، برابر است با حاصل‌ضرب دترمینان‌های آن دو ماتریس.

**مثال ۳۱ــ** دترمینان ماتریس B و A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۰$$

در ماتریس A چون سطر اوّل صفر است، پس دترمینان آن صفر است.

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B|=0$$

در ماتریس B چون ستون اوّل صفر است، پس دترمینان آن صفر است و نیازی به محاسبه ندارد.

**مثال ۳۲ــ** دترمینان ماتریس A و B را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1\times(6-0)-3\times(4-1)+2\times(0-3)=6-9-6=-9$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|B|=1(12-0)-3(4\times 2-1\times 2)+2(4\times 0-1\times 6)$$

$$|B|=12-3(8-2)+2(-6)=12-18-12=-18$$

ملاحظه می‌شود که تنها تفاوت ماتریس A و B در آن است که سطر دوم ماتریس B همان سطر دوم ماتریس A است، که در عدد ۲ ضرب شده است. بنابراین، با توجّه به خاصیت (۴) دترمینان ماتریس B برابر است با همان دترمینان ماتریس A ضرب در عدد ۲. چون دترمینان ماتریس A، ۹− بوده است، پس دترمینان ماتریس B برابر با ۹−×۲ یعنی ۱۸− است.

## ۱۵ــ۷ معکوس یک ماتریس

اگر برای یک ماتریس مربّع $A_{n\times n}$، یک ماتریس هم مرتبه با آن، مانند B وجود داشته باشد، به‌طوری که حاصل ضرب آن‌ها ماتریسی واحد باشد، چنین ماتریسی (B) را معکوس ماتریس A می‌نامند.

$$A_{n\times n}\times B_{n\times n}=I_n=B_{n\times n}\times A_{n\times n}$$

و به این صورت نشان می‌دهند.

$$B_{n\times n}=A_{n\times n}^{-1}$$

ماتریس مربّع با هر مرتبه، تنها هنگامی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد. برای روشن‌تر شدن موضوع به مثال زیر توجّه فرمایید.

**مثال ۳۳ــ معکوس ماتریس A را پیدا کنید.**

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم معکوس ماتریس A، ماتریس مانند B باشد. بنابراین، طبق آن‌چه قبلاً گفته شد

$$A\times B=I$$

و یا

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

درنتیجه داریم :

(۱) $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=1$

(۲) $a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0$

(۳) $a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=0$

(۴) $a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1$

برای پیدا کردن درایه‌های ماتریس B به‌شکل زیر عمل می‌کنیم.

از حلّ دستگاه (۱) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$b_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

و

$$b_{21}=\frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

و از حل دستگاه (۲) و (۴) نتیجه می‌شود :

$$b_{۱۲} = \frac{-a_{۱۲}}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

و

$$b_{۲۲} = \frac{a_{۱۱}}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

توجه کنید که مخرج هریک از این روابط، برابر با دترمینان A است.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}$$

بنابراین، اگر $|A| = ۰$ باشد ماتریس B نامعیّن و $A^{-۱}$ وجود ندارد. پس، هر ماتریس مربّع فقط زمانی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

**مثال ۳۴ــ** معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix} \quad \det A = -۳ - ۲۴ = -۲۷ = |A|$$

چون $|A| \neq ۰$ پس معکوس آن وجود دارد.

$$b_{۱۱} = \frac{۳}{-۲۷} = -\frac{۱}{۹}$$

$$b_{۱۲} = \frac{-۶}{-۲۷} = \frac{۲}{۹}$$

$$b_{۲۱} = \frac{-۴}{-۲۷} = \frac{۴}{۲۷}$$

$$b_{۲۲} = \frac{-۱}{-۲۷} = \frac{۱}{۲۷}$$

پس،

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}^{-۱} = \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \\ \frac{۴}{۲۷} & \frac{۱}{۲۷} \end{pmatrix} = A^{-۱}$$

توجه کنید که :

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A \times A^{-1} = I$$

**مثال ۳۵ــ** معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 15 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 15 - 15 = 0$$

چون دترمینان آن مساوی صفر است، پس، ماتریس A معکوس ندارد. یک ماتریس، زمانی دارای معکوس است که اولاً، این ماتریس مربّع باشد و ثانیاً، دترمینان آن یعنی $|A|$ مخالف صفر گردد.

## ۱۶ــ۷ پیدا کردن ماتریس معکوس به روش عملیّات ردیفی

چون استفاده از روش قبلی در محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس، همیشه عملی نیست و ممکن است محاسبات به‌طول انجامد، روش عملیّات ردیفی نیز قابل استفاده است. این روش بر سه اصل عمده‌ی زیر استوار است :

۱ــ قاعده‌ی کلّی $A \times A^{-1} = I$

۲ــ ضرب یا تقسیم کردن ردیفی از ردیف‌های یک ماتریس در یک، یا بر یک عدد غیر صفر.

۳ــ اضافه یا کسر کردن مضربی از یک ردیف ماتریس به ردیف دیگری از ردیف‌های ماتریس.

برای محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس مربع A، ابتدا ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن $I_n$ را مجاور ماتریس A قرار می‌دهیم (یعنی $A \vdots I$). سپس، بر مبنای این که $A \times A^{-1} = I$ و $A^{-1} \times I = A^{-1}$، عملیّات را به‌شکلی پس می‌گیریم که محلّ دو ماتریس مجاور در $(A \vdots I)$ با یکدیگر تعویض گردند، به شکلی که I محل خود را به $A^{-1}$ بدهد و A به I مبدل شود (یعنی $I \vdots A^{-1}$). لذا قواعد زیر در عملیّات ردیفی برای $A \vdots I$ به‌کار می‌رود.

۱ــ کلیه‌ی درایه‌های بالاترین ردیف ماتریس $A \vdots I$ را بر اوّلین درایه‌ی سمت چپ آن (برای مرحله‌ی اوّل عملیّات، درایه‌ی واقع در ردیف یکم و ستون یکم خواهد بود) تقسیم می‌کنیم (به‌شرطی که این درایه غیر صفر باشد). امّا اگر اوّلین درایه‌ی سمت چپ ردیف، صفر باشد ابتدا هر ردیف دیگری

از ماتریس را که اوّلین عنصر آن صفر نباشد با ردیف اوّل جمع می‌کنیم و سپس قاعده را به‌کار می‌بریم.

بدیهی است چنان‌چه ردیفی وجود نداشته باشد که اوّلین درایه‌ی سمت چپ آن غیر صفر باشد، ماتریس معکوس ندارد.

اجرای اوّلین قاعده سبب می‌گردد که بالاترین درایه‌ی سمت چپ به عدد یک تبدیل گردد و درنتیجه بتوان تجسس را برای داشتن بردار واحد شروع کرد.

۲ــ چنان مضربی از ردیف با اوّلین درایه‌ی تبدیل شده به واحد را با سایر ردیف‌ها جمع می‌کنیم، به‌شکلی که کلّیه‌ی درایه‌ی موجود در ستون حاوی درایه‌ی تبدیل شده به یک (ستون یکم) برابر صفر شوند به‌جز خود درایه‌ی تبدیل شده به واحد که باید تا آخر عملیّات واحد باقی بماند.

۳ــ قاعده‌ی یک و دو را برای کلّیه‌ی ردیف‌های باقی‌مانده تکرار می‌نماییم تا آن‌که $A^{-۱}$ مشخّص گردد. این روش برای حل دستگاه معادلات با استفاده از کامپیوتر کاربرد دارد.

**مثال ۳۶ــ** معکوس ماتریس A را با استفاده از روش عملیّات ردیفی پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A \vdots I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۳ & ۱ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف یکم را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

چنان مضربی از ردیف یکم را با سایر ردیف‌ها جمع می‌نماییم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون یکم به‌استثنای درایه‌ی اوّل برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب صفر از ردیف یکم با ردیف دوم و مضرب ۱− از آن ردیف با ردیف سوم جمع شوند.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

سپس اوّلین درایه‌ی سمت چپ باقی‌مانده برای ردیف دوم عنصر یک است که عملیّات را بر روی آن شروع می‌نماییم.

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف دوم را بر اوّلین درایه‌ی باقی‌مانده در سمت چپ (عدد یک) تقسیم می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

چنان مضربی از ردیف دوم به سایر ردیف‌ها اضافه می‌کنیم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون دوم به‌استثنای درایه‌ی واحد آن برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب $-\frac{1}{3}$ از آن با ردیف اوّل و مضرب $\frac{1}{3}$ از آن با ردیف سوم جمع گردد.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

اینک عملیّات ردیفی را برای اوّلین درایه باقی‌مانده در سمت چپ ردیف سوم (یعنی $\frac{2}{3}$) انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، کلّیه‌ی درایه‌های ردیف سوم را بر عنصر $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌نماییم.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

بالأخره برای تبدیل درایه‌های ستون سوم، به استثنای درایه‌ی سوم آن به صفر، باید مضرب $-1$ از آن را با ردیف دوم و مضرب $-\frac{4}{3}$ از آن را با ردیف اول جمع نماییم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

ملاحظه می‌شود که دراثر عملیّات ردیفی ماتریس$(A \vdots I)$ تبدیل به$(I \vdots A^{-1})$ می‌شود و معکوس A به‌دست آمده است.

**۱ــ۱۶ــ۷ پیدا کردن ماتریس معکوس با استفاده از ماتریس الحاقی:** روش دیگری که برای محاسبه‌ی ماتریس معکوس به‌کار می‌رود، استفاده از ماتریس الحاقی است. در این روش، دترمینان ماتریسی که می‌خواهیم معکوس آن را به‌دست آوریم، محاسبه می‌کنیم. اگر A ماتریس (غیرمنفرد، نامنفرد) معکوس‌پذیر باشد، یعنی $|A| \neq 0$ در این‌صورت داریم :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$$

**مثال ۳۷ــ** معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$|A| = 3$$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

درنتیجه

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**مثال ۳۸ــ** معکوس ماتریس را در صورت وجود تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۰ + ۲(-۲ + ۳) + (-۳)(-۲ + ۳) = -۱$$

پس عناصر ماتریس الحاقی عبارت‌اند از

$$\hat{A}_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ -۲ & -۲ \end{vmatrix} = -۶ + ۶ = ۰$$

$$\hat{A}_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -(-۲ + ۳) = -۱$$

$$\hat{A}_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۲ + ۳ = ۱$$

$$\hat{A}_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ -۲ & -۲ \end{vmatrix} = -(۴ - ۶) = ۲$$

$$\hat{A}_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ - ۳ = -۳$$

$$\hat{A}_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -(۰ - ۲) = ۲$$

$$\hat{A}_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix} = -۶ + ۹ = ۳$$

$$\hat{A}_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -(۰ + ۳) = -۳$$

$$\hat{A}_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۰ + ۲ = ۲$$

$$\operatorname{adj}A = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

پس

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\,\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۳ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

## ۱۷ـ۷ دستگاه سه معادله‌ی سه‌مجهولی

برای حل دستگاه سه‌معادله‌ی سه مجهولی، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم.

ب) هم‌سازه‌های ستون اوّل را تشکیل می‌دهیم.

ج) $\dot{A}_{۱۱}$ را در معادله‌ی اوّل، $\dot{A}_{۲۱}$ را در معادله‌ی دوم و $\dot{A}_{۳۱}$ را در معادله‌ی سوم ضرب می‌نماییم.

د) هر سه معادله را با هم جمع و x را محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۳۹ـ** دستگاه را با استفاده از هم‌سازه، نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x+y+z=۰ \\ x-y+۵z=۰ \\ x-۲y-z=-۱۸ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۵ \\ ۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\dot{A}_{۱۱}=(-۱)^{۲}\begin{vmatrix} -۱ & ۵ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix}=۱+۱۰=۱۱$$

$$\dot{A}_{۲۱}=(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix}=-(-۱+۲)=-۱$$

$$\dot{A}_{۳۱}=(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix}=۵+۱=۶$$

$$\begin{cases} ۱۱(۲x+y+z)=۰ \\ -۱(x-y+۵z)=۰ \\ ۶(x-۲y-z)=-۱۸\times ۶ \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&۲۲x+۱۱y+۱۱z=۰\\
&-x+y-۵z=۰\\
&۶x-۱۲y-۶z=-۱۰۸\\
\hline
&(۲۲x-x+۶x)+(۱۱y+y-۱۲y)+(۱۱z-۵z-۶z)=-۱۰۸
\end{aligned}
$$

$$۲۷x=-۱۰۸$$

$$x=-۴$$

**مثال ۴۰ـ** این دستگاه را با استفاده از هم‌سازه نسبت به x حل کنید.

$$
\begin{cases}
۲x+y=۲\\
۳x-۲z=۴\\
y+۳z=۱
\end{cases}
$$

$$
A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}
\qquad
\dot{A}_{۱۱}=\begin{vmatrix} ۰ & -۲\\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=+۲
$$

$$
\dot{A}_{۲۱}=(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۰\\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=-۳
\qquad
\dot{A}_{۳۱}=\begin{vmatrix} ۱ & ۰\\ ۰ & -۲ \end{vmatrix}=-۲
$$

$$
\begin{aligned}
۲ &\quad ۴x+۲y=۴\\
-۳ &\quad -۹x+۶z=-۱۲ \qquad\qquad -۵x=-۱۰ \quad x=۲\\
-۲ &\quad -۲y-۶z=-۲
\end{aligned}
$$

**روش دیگری برای حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی:** برای حل دستگاه به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را + می‌نامیم.

ب) دترمینان + را محاسبه می‌کنیم. به شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اوّل را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۱$

می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_{۲}$ می‌نامیم.

هـ) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_{۳}$ می‌نامیم.

و) دترمینان $+_{۱}$ و $+_{۲}$ و $+_{۳}$ را محاسبه می‌نماییم.

ز) با استفاده از فرمول $x_i = \frac{+_i}{+}\ ,\ i = ۱,۲,۳$

جواب‌های دستگاه به‌دست می‌آید.

**مثال ۴۱ــ** دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ = ۵ \\ x_۱ + x_۲ + ۵x_۳ = -۷ \end{cases}$$

را حل کنید.

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با

$$= . \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵-۱)-(۵-۱)+(۱-۳) = ۲۸-۴-۲ = ۲۲$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$+_{x_۱} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۱ \\ -۷ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵-۱)-(۲۵+۷)+(۵+۲۱) = ۲۸-۳۲+۲۶ = ۲۲$$

$$+_{x_۲} = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۱ \\ ۱ & -۷ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۲۵+۷)-۲(۵-۱)+(-۷-۵) = ۶۴-۸-۱۲ = ۴۴$$

$$+_{x_۳} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ & -۷ \end{vmatrix} = ۲(-۲۱-۵)-(-۷-۵)+۲(۱-۳) = -۵۲+۱۲-۴ = -۴۴$$

درنتیجه

$$x_۱ = \frac{+_{x_۱}}{+} = \frac{۲۲}{۲۲} = ۱ \quad . \qquad x_۱ = ۱$$

$$x_۲ = \frac{+_{x_۲}}{+} = \frac{۴۴}{۲۲} = ۲ \quad . \qquad x_۲ = ۲$$

$$x_۳ = \frac{+_{x_۳}}{+} = \frac{-۴۴}{۲۲} = -۲ \quad . \qquad x_۳ = -۲$$

حال امتحان می‌کنیم.

$$۲(۱) + ۲ + (-۲) = ۲ \quad . \qquad ۲ = ۲ \; .$$

$$۱ + ۳(۲) + (-۲) = ۱ + ۶ - ۲ = ۵ \quad . \qquad ۵ = ۵ \; .$$

$$۱ + ۲ + ۵(-۲) = ۱ + ۲ - ۱۰ = -۷ \quad . \qquad -۷ = -۷ \; .$$

## ۱۸ــ۷ دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی (جهت مطالعه آزاد)

برای حل دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را $+$ می‌نامیم.

ب) دترمینان $+$ را محاسبه می‌کنیم، به‌شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اوّل را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۱$ می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۲$ می‌نامیم.

هـ) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۳$ می‌نامیم.

و) در ماتریس ضرایب، ستون چهارم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۴$ می‌نامیم.

ز) دترمینان $+_۱$ و $+_۲$ و $+_۳$ و $+_۴$ را محاسبه می‌نماییم.

ح) با استفاده از فرمول

$$x_i = \frac{+_i}{+} \;,\quad i = ۱,۲,\ldots,n$$

جواب‌های دستگاه به‌دست می‌آید.

**مثال ۴۲ـ** دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$
\begin{array}{l}
. \ ۲x_۱ + x_۲ - ۵x_۳ + x_۴ = ۸ \\
x_۱ - ۳x_۲ - ۶x_۴ = ۹ \\
^{\cdot}\ ۲x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ = -۵ \\
. \ x_۱ + ۴x_۲ - ۷x_۳ + ۶x_۴ = ۰
\end{array}
$$

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با :

$$= . \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۵ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۰ & -۶ \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = ۲۷ . \ ۰$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$+_۱ = \begin{vmatrix} ۸ & ۱ & -۵ & ۱ \\ ۹ & -۳ & ۰ & -۶ \\ -۵ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = ۸۱$$

$$+_۲ = \begin{vmatrix} ۲ & ۸ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۹ & ۰ & -۶ \\ ۰ & -۵ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = -۱۰۸$$

$$+_۳ = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۸ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۹ & -۶ \\ ۰ & ۲ & -۵ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = -۲۷$$

$$+_{۴}=\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۵ & ۸ \\ ۱ & -۳ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۲ & -۱ & -۵ \\ ۱ & ۴ & -۷ & ۰ \end{vmatrix}=۲۷$$

درنتیجه

$$x_{۱}=\frac{+_{۱}}{+}=\frac{۸۱}{۲۷}=۳$$

$$x_{۲}=\frac{+_{۲}}{+}=\frac{-۱۰۸}{۲۷}=-۴$$

$$x_{۳}=\frac{+_{۳}}{+}=\frac{-۲۷}{۲۷}=-۱$$

$$x_{۴}=\frac{+_{۴}}{+}=\frac{۲۷}{۲۷}=۱$$

حال امتحان می‌کنیم

$$۲(۳)+(-۴)-۵(-۱)+۱=۸ . \quad ۶-۴+۵+۱=۸ . \quad ۸=۸$$

$$۳-۳(-۴)-۶(۱)=۹ . \quad ۳+۱۲-۶=۹ . \quad ۹=۹$$

$$۲(-۴)-(-۱)+۲(۱)=-۵- . \quad ۸+۱+۲=-۵ . \quad -۵=-۵$$

$$۳+۴(-۴)-۷(-۱)+۶(۱)=۰ . \quad ۳-۱۶+۷+۶=۰ . \quad ۰=۰$$

## تمرین‌های فصل هفتم

۱ــ ماتریس‌های زیر را دوبه‌دو با هم جمع کنید.

۲ ۰# ۱ ۲#
!۱ ۳%+ !۴ ۰%=

۳ ۵ ۱# ۱ ۲ ۳#
۲ ۲ ۰%+ ۰ ۱ ۰%=
!۱ ۲ ۱% !۲ ۲ ۱%

a b c# ۱ ۰ ۱#
!d e f%+ !۲ ۲ ۱%=

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

**۲ــ** ماتریس‌های زیر را در هم ضرب نمایید :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} =$$

**۳ــ** دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

**۴ــ** معکوس ماتریس‌های زیر را در صورت وجود، پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

۵ ــ دستگاه‌های زیر را با استفاده از هم‌سازه نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y-z=0 \\ 2x+3y+z=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+3y+z=2 \\ x-y+2z=6 \\ 2x+y-z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-z=-1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=25 \\ 2x+y-z=9 \\ -x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+2z=45 \\ 2x-y+z=15 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x+y+z=۴ \\ y-z=-۱ \\ x+y-z=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=۱ \\ ۳x-z=۲ \\ ۴x-y=۵ \end{cases}$$

۶ــ در ماتریس A ، مقدار x را طوری تعیین کنید که دترمینان A برابر ۱۵ــ باشد.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ x & ۱ & x-۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۷ــ یک شرکت مقاطعه‌کاری برای هر ساعت کامیون بدون راننده ۶۰۰۰ تومان، بابت کرایه هر ساعت تراکتور بدون راننده ۲۰۰۰ تومان و برای هر ساعت جهت راننده ۱۰۰۰ تومان پرداخت می‌نماید. این شرکت از ماتریس A برای انجام کارهای مختلف استفاده می‌نماید.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array} \\ A= & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \end{array}$$

الف) اگر $P=\begin{bmatrix} ۶۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$ نشان‌دهنده‌ی ماتریس قیمت باشد، که توسط این شرکت پرداخت می‌شود، ماتریس PA را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید که شرکت برای انجام یک طرح کوچک نیازمند ۲۰ ساعت کار از نوع I ، و ۳۰ ساعت کار از نوع II است. اگر $S=\begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۳۰ \\ \\ \end{bmatrix}$ ماتریس تقاضا باشد AS را محاسبه کنید.

ج) PAS را محاسبه نمایید.

۸ــ یک فروشنده‌ی ماشین حساب پنج مدل ماشین‌حساب خود را در سه مغازه که در مناطق

مختلف شهر قرار دارند می‌فروشند. موجودی هر مدل در هر مغازه در ماتریس M خلاصه شده است. قیمت فروش کلی (W) و جزئی (R) برای هر مدل در ماتریس N نوشته شده است.

$$M=\begin{array}{c}\\ \text{مغازه‌ی ۱}\\ \text{مغازه‌ی ۲}\\ \text{مغازه‌ی ۳}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}A & B & C & D & E\end{array}\\ \begin{bmatrix}4 & 2 & 3 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 5 & 0 & 6\\ 10 & 4 & 3 & 4 & 3\end{bmatrix}\end{array}$$

$$N=\begin{array}{c}\\ \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{تومان} & \text{تومان}\\ W & R\end{array}\\ \begin{bmatrix}700 & 840\\ 1400 & 1800\\ 1800 & 2400\\ 2700 & 3300\\ 3500 & 4900\end{bmatrix}\end{array}$$

الف) قیمت جزئی موجودی مغازه‌ی ۲ چه‌قدر است؟

ب) قیمت کلی موجودی مغازه‌ی ۳ چه‌قدر است؟

ج) ماتریس MN را محاسبه نمایید.

۹ــ یک پیمان‌کار توافق کرده است که ۴ ویلا، ۳ آپارتمان و ۹ خوابگاه بسازد. این توافق را می‌توان در قالب ماتریس زیر نشان داد.

$$Q=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ویلا} & \text{آپارتمان} & \text{خوابگاه}\end{array}\\ \begin{bmatrix}4 & 3 & 9\end{bmatrix}\end{array}$$

مقادیر ریالی مصالح معدنی درساخت ساختمان‌ها و دستمزد کارگران به شرح ماتریس زیر است :

$$R=\begin{array}{c}\\ \text{ویلا}\\ \text{آپارتمان}\\ \text{خوابگاه}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\text{آجر} & \text{چوب} & \text{شیشه} & \text{بتن} & \text{دستمزد کارگران}\end{array}\\ \begin{bmatrix}100 & 30 & 50 & 30 & 120\\ 40 & 80 & 20 & 40 & 100\\ 60 & 50 & 70 & 20 & 100\end{bmatrix}\end{array}$$

مطلوب است : محاسبه‌ی $Q\times R$ ، که بیانگر میزان مصالح و کارگر لازم برای ساخت هر ساختمان است.

۱۰ــ امید و خواهرش مریم هر کدام به دو فروشگاه متفاوت می‌روند. امید ۴ کیلو شکر به ازای هر کیلو ۶۰۰ تومان، ۲ کیلو گوشت که هر کیلوی آن ۴۰۰۰ تومان و ۳ بسته نان که هر بسته‌ی آن ۱۲۰ تومان است می‌خرد. مریم نیز ۲ کیلوگرم شکر به ازای هر کیلو ۷۵۰ تومان ، ۱کیلوگوشت که هر کیلوی آن ۳۵۰۰ تومان و ۴ بسته نان که هر بسته آن ۱۰۰ تومان است می‌خرد.

مطلوب است :

۱ــ جمع کل پولی که امید و مریم هر کدام بابت خریدهایشان پرداخت کرده‌اند.

۲ــ مشخص کنید که اگر امید از فروشگاهی که مریم خرید کرده بود، خرید می‌کرد چه‌قدر پول باید می‌پرداخت؟

۳ــ اگر مریم ازفروشگاهی که امید از آن خریداری کرده بود، خرید می‌کرد، چه‌قدر پول باید می‌پرداخت؟

۱۱ــ فرض کنید شرکتی ۳ نوع شکلات (کاکائویی، قهوه‌ای و شیری) تولید می‌کند و قصد دارد از هر شکلات به تعداد زیر در ماه فروردین در ۲ مدرسه‌ی دخترانه و پسرانه بفروشد :

$$T = \begin{array}{ccc} \text{شکلات شیری} & \text{شکلات قهوه‌ای} & \text{شکلات کاکائویی} & \\ \left[\begin{array}{c} 120 \\ 65 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 70 \\ 100 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 105 \\ 145 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \end{array} \end{array}$$

اگر اطلاعات مربوط به فروش واقعی شکلات‌های این شرکت به‌صورت ماتریس زیر باشد ،اختلاف بین فروش پیش‌بینی شده و فروش واقعی این شرکت در هریک از این مدارس چه‌قدر است؟

$$J = \begin{array}{ccc} \text{شکلات شیری} & \text{شکلات قهوه‌ای} & \text{شکلات کاکائویی} & \\ \left[\begin{array}{c} 120 \\ 80 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 50 \\ 75 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 100 \\ 150 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \end{array} \end{array}$$

۱۲ــ سارا و زهرا و نیما به یک مغازه میوه فروشی رفته‌اند. سارا ۱۲ عدد پرتقال، ۵ عدد انار، ۲۰ عدد سیب، ۶ عدد موز و ۳ عدد لیموترش خرید. زهرا ۲۰ عدد پرتقال، ۳ عدد انار، ۱۰ عدد سیب و ۴ عدد موز خرید و نیما هم ۱۰ عدد پرتقال، ۱۰ عدد انار، ۱۲ عدد موز خرید. اگر قیمت هر عدد پرتقال ۳۰۰ تومان، انار ۲۰۰ تومان، سیب ۵۰ تومان، موز ۱۰۰ تومان و لیموترش ۱۰ تومان باشد.

مطلوب است :

الف) مقدار میوه‌های خریداری شده توسط هر یک از این ۳ نفر را در یک ماتریس افقی نشان دهید.

ب) قیمت خرید هر نوع میوه توسط این ۳ نفر را در یک ماتریس ستونی نشان دهید.

ج) از طریق ضرب ماتریس‌ها، صورت‌حساب هر کدام از این ۳ نفر را تهیه کنید.

د) با استفاده از جمع ماتریس‌ها مشخص کنید از هر نوع میوه، کلاً چند عدد خریداری شده است؟

هـ) با استفاده از ضرب ماتریس‌ها، حساب کنید برای خرید هر نوع میوه جمعاً چند تومان پرداخت شده است؟

# پیوست

## جدول ۱ــ ارزش نهایی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

| n | 1.5% | 4.0% | 4.5% | 5.0% | 5.5% | 6.0% | 7.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 2.015000 | 2.040000 | 2.045000 | 2.050000 | 2.055000 | 2.060000 | 2.070000 |
| 3 | 3.045225 | 3.121600 | 3.137025 | 3.152500 | 3.168025 | 3.183600 | 3.214900 |
| 4 | 4.090903 | 4.246464 | 4.278191 | 4.310125 | 4.342266 | 4.374616 | 4.439943 |
| 5 | 5.152267 | 5.416323 | 5.470710 | 5.525631 | 5.581091 | 5.637093 | 5.750739 |
| 6 | 6.229551 | 6.632975 | 6.716892 | 6.801913 | 6.888051 | 6.975319 | 7.153291 |
| 7 | 7.322994 | 7.898294 | 8.019152 | 8.142008 | 8.266894 | 8.393838 | 8.654021 |
| 8 | 8.432839 | 9.214226 | 9.380014 | 9.549109 | 9.721573 | 9.897468 | 10.259803 |
| 9 | 9.559332 | 10.582795 | 10.802114 | 11.026564 | 11.256260 | 11.491316 | 11.977989 |
| 10 | 10.702722 | 12.006107 | 12.288209 | 12.577893 | 12.875354 | 13.180795 | 13.816448 |
| 11 | 11.863262 | 13.486351 | 13.841179 | 14.206787 | 14.583498 | 14.971643 | 15.783599 |
| 12 | 13.041211 | 15.025805 | 15.464032 | 15.917127 | 16.385591 | 16.869941 | 17.888451 |
| 13 | 14.236830 | 16.626838 | 17.159913 | 17.712983 | 18.286798 | 18.882138 | 20.140643 |
| 14 | 15.450382 | 18.291911 | 18.932109 | 19.598632 | 20.292572 | 21.015066 | 22.550488 |
| 15 | 16.682138 | 20.023588 | 20.784054 | 21.578564 | 22.408663 | 23.275970 | 25.129022 |
| 16 | 17.932370 | 21.824531 | 22.719337 | 23.657492 | 24.641140 | 25.672528 | 27.888054 |
| 17 | 19.201355 | 23.697512 | 24.741707 | 25.840366 | 26.996403 | 28.212880 | 30.840217 |
| 18 | 20.489376 | 25.645413 | 26.855084 | 28.132385 | 29.481205 | 30.905653 | 33.999033 |
| 19 | 21.796716 | 27.671229 | 29.063562 | 30.539004 | 32.102671 | 33.759992 | 37.378965 |
| 20 | 23.123667 | 29.778079 | 31.371423 | 33.065954 | 34.868318 | 36.785591 | 40.995492 |
| 21 | 24.470522 | 31.969202 | 33.783137 | 35.719252 | 37.786076 | 39.992727 | 44.865177 |
| 22 | 25.837580 | 34.247970 | 36.303378 | 38.505214 | 40.864310 | 43.392290 | 49.005739 |
| 23 | 27.225144 | 36.617889 | 38.937030 | 41.430475 | 44.111847 | 46.995828 | 53.436141 |
| 24 | 28.633521 | 39.082604 | 41.689196 | 44.501999 | 47.537998 | 50.815577 | 58.176671 |
| 25 | 30.063024 | 41.645908 | 44.565210 | 47.727099 | 51.152588 | 54.864512 | 63.249038 |
| 26 | 31.513969 | 44.311745 | 47.570645 | 51.113454 | 54.965981 | 59.156383 | 68.676470 |
| 27 | 32.986678 | 47.084214 | 50.711324 | 54.669126 | 58.989109 | 63.705766 | 74.483823 |
| 28 | 34.481479 | 49.967583 | 53.993333 | 58.402583 | 63.233510 | 68.528112 | 80.697691 |
| 29 | 35.998701 | 52.966286 | 57.423033 | 62.322712 | 67.711354 | 73.639798 | 87.346529 |
| 30 | 37.538681 | 56.084938 | 61.007070 | 66.438848 | 72.435478 | 79.058186 | 94.460786 |

| n | 8.0% | 9.0% | 10.0% | 12.0% | 14.0% | 16.0% | 18.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 2.080000 | 2.090000 | 2.100000 | 2.120000 | 2.140000 | 2.160000 | 2.180000 |
| 3 | 3.246400 | 3.278100 | 3.310000 | 3.374400 | 3.439600 | 3.505600 | 3.572400 |
| 4 | 4.506112 | 4.573129 | 4.641000 | 4.779328 | 4.921144 | 5.066496 | 5.215432 |
| 5 | 5.866601 | 5.984711 | 6.105100 | 6.352847 | 6.610104 | 6.877135 | 7.154210 |
| 6 | 7.335929 | 7.523335 | 7.715610 | 8.115189 | 8.535519 | 8.977477 | 9.441968 |
| 7 | 8.922803 | 9.200435 | 9.487171 | 10.089012 | 10.730491 | 11.413873 | 12.141522 |
| 8 | 10.636628 | 11.028474 | 11.435888 | 12.299693 | 13.232760 | 14.240093 | 15.326996 |
| 9 | 12.487558 | 13.021036 | 13.579477 | 14.775656 | 16.085347 | 17.518508 | 19.085855 |
| 10 | 14.486562 | 15.192930 | 15.937425 | 17.548735 | 19.337295 | 21.321469 | 23.521309 |
| 11 | 16.645487 | 17.560293 | 18.531167 | 20.654583 | 23.044516 | 25.732904 | 28.755144 |
| 12 | 18.977126 | 20.140720 | 21.384284 | 24.133133 | 27.270749 | 30.850169 | 34.931070 |
| 13 | 21.495297 | 22.953385 | 24.522712 | 28.029109 | 32.088654 | 36.786196 | 42.218663 |
| 14 | 24.214920 | 26.019189 | 27.974983 | 32.392602 | 37.581065 | 43.671987 | 50.818022 |
| 15 | 27.152114 | 29.360916 | 31.772482 | 37.279715 | 43.842414 | 51.659505 | 60.965266 |
| 16 | 30.324283 | 33.003399 | 35.949730 | 42.753280 | 50.980352 | 60.925026 | 72.939014 |
| 17 | 33.750226 | 36.973705 | 40.544703 | 48.883674 | 59.117601 | 71.673030 | 87.068036 |
| 18 | 37.450244 | 41.301338 | 45.599173 | 55.749715 | 68.394066 | 84.140715 | 103.740283 |
| 19 | 41.446263 | 46.018458 | 51.159090 | 63.439681 | 78.969235 | 98.603230 | 123.413534 |
| 20 | 45.761964 | 51.160120 | 57.274999 | 72.052442 | 91.024928 | 115.379747 | 146.627970 |
| 21 | 50.422921 | 56.764530 | 64.002499 | 81.698736 | 104.768418 | 134.840506 | 174.021005 |
| 22 | 55.456755 | 62.873338 | 71.402749 | 92.502584 | 120.435996 | 157.414987 | 206.344785 |
| 23 | 60.893296 | 69.531939 | 79.543024 | 104.602894 | 138.297035 | 183.601385 | 244.486847 |
| 24 | 66.764759 | 76.789813 | 88.497327 | 118.155241 | 158.658620 | 213.977607 | 289.494479 |
| 25 | 73.105940 | 84.700896 | 98.347059 | 133.333870 | 181.870827 | 249.214024 | 342.603486 |
| 26 | 79.954415 | 93.323977 | 109.181765 | 150.333934 | 208.332743 | 290.088267 | 405.272113 |
| 27 | 87.350768 | 102.723135 | 121.099942 | 169.374007 | 238.499327 | 337.502390 | 479.221093 |
| 28 | 95.338830 | 112.968217 | 134.209936 | 190.698887 | 272.889233 | 392.502773 | 566.480890 |
| 29 | 103.965936 | 124.135356 | 148.630930 | 214.582754 | 312.093725 | 456.303216 | 669.447450 |
| 30 | 113.283211 | 136.307539 | 164.494023 | 241.332684 | 356.786847 | 530.311731 | 790.9479 |

## جدول ۲ـــ ارزش فعلی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

| $n$ | 1.5% | 4.0% | 4.5% | 5.0% | 5.5% | 6.0% | 7.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.985222 | 0.961538 | 0.956938 | 0.952381 | 0.947867 | 0.943396 | 0.934579 |
| 2 | 1.955883 | 1.886095 | 1.872668 | 1.859410 | 1.846320 | 1.833393 | 1.808018 |
| 3 | 2.912200 | 2.775091 | 2.748964 | 2.723248 | 2.697933 | 2.673012 | 2.624316 |
| 4 | 3.854385 | 3.629895 | 3.587526 | 3.545951 | 3.505150 | 3.465106 | 3.387211 |
| 5 | 4.782645 | 4.451822 | 4.389977 | 4.329477 | 4.270284 | 4.212364 | 4.100197 |
| 6 | 5.697187 | 5.242137 | 5.157872 | 5.075692 | 4.995530 | 4.917324 | 4.766540 |
| 7 | 6.598214 | 6.002055 | 5.892701 | 5.786373 | 5.682967 | 5.582381 | 5.389289 |
| 8 | 7.485925 | 6.732745 | 6.595886 | 6.463213 | 6.334566 | 6.209794 | 5.971299 |
| 9 | 8.360517 | 7.435332 | 7.268790 | 7.107822 | 6.952195 | 6.801692 | 6.515232 |
| 10 | 9.222185 | 8.110896 | 7.912718 | 7.721735 | 7.537626 | 7.360087 | 7.023582 |
| 11 | 10.071118 | 8.760477 | 8.528917 | 8.306414 | 8.092536 | 7.886875 | 7.498674 |
| 12 | 10.907505 | 9.385074 | 9.118581 | 8.863252 | 8.618518 | 8.383844 | 7.942686 |
| 13 | 11.731532 | 9.985648 | 9.682852 | 9.393573 | 9.117079 | 8.852683 | 8.357651 |
| 14 | 12.543382 | 10.563123 | 10.222825 | 9.898641 | 9.589648 | 9.294984 | 8.745468 |
| 15 | 13.343233 | 11.118387 | 10.739546 | 10.379658 | 10.037581 | 9.712249 | 9.107914 |
| 16 | 14.131264 | 11.652296 | 11.234015 | 10.837770 | 10.462162 | 10.105895 | 9.446649 |
| 17 | 14.907649 | 12.165669 | 11.707191 | 11.274066 | 10.864609 | 10.477260 | 9.763223 |
| 18 | 15.672561 | 12.659297 | 12.159992 | 11.689587 | 11.246074 | 10.827603 | 10.059087 |
| 19 | 16.426168 | 13.133939 | 12.593294 | 12.085321 | 11.607654 | 11.158116 | 10.335595 |
| 20 | 17.168639 | 13.590326 | 13.007936 | 12.462210 | 11.950382 | 11.469921 | 10.594014 |
| 21 | 17.900137 | 14.029160 | 13.404724 | 12.821153 | 12.275244 | 11.764077 | 10.835527 |
| 22 | 18.620824 | 14.451115 | 13.784425 | 13.163003 | 12.583170 | 12.041582 | 11.061240 |
| 23 | 19.330861 | 14.856842 | 14.147775 | 13.488574 | 12.875042 | 12.303379 | 11.272187 |
| 24 | 20.030405 | 15.246963 | 14.495478 | 13.798642 | 13.151699 | 12.550358 | 11.469334 |
| 25 | 20.719611 | 15.622080 | 14.828209 | 14.093945 | 13.413933 | 12.783356 | 11.653583 |
| 26 | 21.398632 | 15.982769 | 15.146611 | 14.375185 | 13.662495 | 13.003166 | 11.825779 |
| 27 | 22.067617 | 16.329586 | 15.451303 | 14.643034 | 13.898100 | 13.210534 | 11.986709 |
| 28 | 22.726717 | 16.663063 | 15.742874 | 14.898127 | 14.121422 | 13.406164 | 12.137111 |
| 29 | 23.376076 | 16.983715 | 16.021889 | 15.141074 | 14.333101 | 13.590721 | 12.277674 |
| 30 | 24.015838 | 17.292033 | 16.288889 | 15.372451 | 14.533745 | 13.764831 | 12.409041 |

| $n$ | 8.0% | 9.0% | 10.0% | 12.0% | 14.0% | 16.0% | 18.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.925926 | 0.917431 | 0.909091 | 0.892857 | 0.877193 | 0.862069 | 0.847458 |
| 2 | 1.783265 | 1.759111 | 1.735537 | 1.690051 | 1.646661 | 1.605232 | 1.565642 |
| 3 | 2.577097 | 2.531295 | 2.486852 | 2.401831 | 2.321632 | 2.245890 | 2.174273 |
| 4 | 3.312127 | 3.239720 | 3.169865 | 3.037349 | 2.913712 | 2.798181 | 2.690062 |
| 5 | 3.992710 | 3.889651 | 3.790787 | 3.604776 | 3.433081 | 3.274294 | 3.127171 |
| 6 | 4.622880 | 4.485919 | 4.355261 | 4.111407 | 3.888668 | 3.684736 | 3.497603 |
| 7 | 5.206370 | 5.032953 | 4.868419 | 4.563757 | 4.288305 | 4.038565 | 3.811528 |
| 8 | 5.746639 | 5.534819 | 5.334926 | 4.967640 | 4.638864 | 4.343591 | 4.077566 |
| 9 | 6.246888 | 5.995247 | 5.759024 | 5.328250 | 4.946372 | 4.606544 | 4.303022 |
| 10 | 6.710081 | 6.417658 | 6.144567 | 5.650223 | 5.216116 | 4.833227 | 4.494086 |
| 11 | 7.138964 | 6.805191 | 6.495061 | 5.937699 | 5.452733 | 5.028644 | 4.656005 |
| 12 | 7.536078 | 7.160725 | 6.813692 | 6.194374 | 5.660292 | 5.197107 | 4.793225 |
| 13 | 7.903776 | 7.486904 | 7.103356 | 6.423548 | 5.842362 | 5.342334 | 4.909513 |
| 14 | 8.244237 | 7.786150 | 7.366687 | 6.628168 | 6.002072 | 5.467529 | 5.008062 |
| 15 | 8.559479 | 8.060688 | 7.606080 | 6.810864 | 6.142168 | 5.575456 | 5.091578 |
| 16 | 8.851369 | 8.312558 | 7.823709 | 6.973986 | 6.265060 | 5.668497 | 5.162354 |
| 17 | 9.121638 | 8.543631 | 8.021553 | 7.119630 | 6.372859 | 5.748704 | 5.222334 |
| 18 | 9.371887 | 8.755625 | 8.201412 | 7.249670 | 6.467420 | 5.817848 | 5.273164 |
| 19 | 9.603599 | 8.950115 | 8.364920 | 7.365777 | 6.550369 | 5.877455 | 5.316241 |
| 20 | 9.818147 | 9.128546 | 8.513564 | 7.469444 | 6.623131 | 5.928841 | 5.352746 |
| 21 | 10.016803 | 9.292244 | 8.648694 | 7.562003 | 6.686957 | 5.973139 | 5.383683 |
| 22 | 10.200744 | 9.442425 | 8.771540 | 7.644646 | 6.742944 | 6.011326 | 5.409901 |
| 23 | 10.371059 | 9.580207 | 8.883218 | 7.718434 | 6.792056 | 6.044247 | 5.432120 |
| 24 | 10.528758 | 9.706612 | 8.984744 | 7.784316 | 6.835137 | 6.072627 | 5.450949 |
| 25 | 10.674776 | 9.822580 | 9.077040 | 7.843139 | 6.872927 | 6.097092 | 5.466906 |
| 26 | 10.809978 | 9.928972 | 9.160945 | 7.895660 | 6.906077 | 6.118183 | 5.480429 |
| 27 | 10.935165 | 10.026580 | 9.237223 | 7.942554 | 6.935155 | 6.136364 | 5.491889 |
| 28 | 11.051078 | 10.116128 | 9.306567 | 7.984423 | 6.960662 | 6.152038 | 5.501601 |
| 29 | 11.158406 | 10.198283 | 9.369606 | 8.021806 | 6.983037 | 6.165550 | 5.509831 |
| 30 | 11.257783 | 10.273654 | 9.426914 | 8.055184 | 7.002664 | 6.177198 | 5.516806 |

## جدول ۳ــ ارزش فعلی اقساط مساوی یک ریالی را نشان می‌دهد که در ابتدای هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

| n | 1.5% | 4.0% | 4.5% | 5.0% | 5.5% | 6.0% | 7.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 1.985222 | 1.961538 | 1.956938 | 1.952381 | 1.947867 | 1.943396 | 1.934579 |
| 3 | 2.955883 | 2.886095 | 2.872668 | 2.859410 | 2.846320 | 2.833393 | 2.808018 |
| 4 | 3.912200 | 3.775091 | 3.748964 | 3.723248 | 3.697933 | 3.673012 | 3.624316 |
| 5 | 4.854385 | 4.629895 | 4.587526 | 4.545951 | 4.505150 | 4.465106 | 4.387211 |
| 6 | 5.782645 | 5.451822 | 5.389977 | 5.329477 | 5.270284 | 5.212364 | 5.100197 |
| 7 | 6.697187 | 6.242137 | 6.157872 | 6.075692 | 5.995530 | 5.917324 | 5.766540 |
| 8 | 7.598214 | 7.002055 | 6.892701 | 6.786373 | 6.682967 | 6.582381 | 6.389289 |
| 9 | 8.485925 | 7.732745 | 7.595886 | 7.463213 | 7.334566 | 7.209794 | 6.971299 |
| 10 | 9.360517 | 8.435332 | 8.268790 | 8.107822 | 7.952195 | 7.801692 | 7.515232 |
| 11 | 10.222185 | 9.110896 | 8.912718 | 8.721735 | 8.537626 | 8.360087 | 8.023582 |
| 12 | 11.071118 | 9.760477 | 9.528917 | 9.306414 | 9.092536 | 8.886875 | 8.498674 |
| 13 | 11.907505 | 10.385074 | 10.118581 | 9.863252 | 9.618518 | 9.383844 | 8.942686 |
| 14 | 12.731532 | 10.985648 | 10.682852 | 10.393573 | 10.117079 | 9.852683 | 9.357651 |
| 15 | 13.543382 | 11.563123 | 11.222825 | 10.898641 | 10.589648 | 10.294984 | 9.745468 |
| 16 | 14.343233 | 12.118387 | 11.739546 | 11.379658 | 11.037581 | 10.712249 | 10.107914 |
| 17 | 15.131264 | 12.652296 | 12.234015 | 11.837770 | 11.462162 | 11.105895 | 10.446649 |
| 18 | 15.907649 | 13.165669 | 12.707191 | 12.274066 | 11.864609 | 11.477260 | 10.763223 |
| 19 | 16.672561 | 13.659297 | 13.159992 | 12.689587 | 12.246074 | 11.827603 | 11.059087 |
| 20 | 17.426168 | 14.133939 | 13.593294 | 13.085321 | 12.607654 | 12.158116 | 11.335595 |
| 21 | 18.168639 | 14.590326 | 14.007936 | 13.462210 | 12.950382 | 12.469921 | 11.594014 |
| 22 | 18.900137 | 15.029160 | 14.404724 | 13.821153 | 13.275244 | 12.764077 | 11.835527 |
| 23 | 19.620824 | 15.451115 | 14.784425 | 14.163003 | 13.583170 | 13.041582 | 12.061240 |
| 24 | 20.330861 | 15.856842 | 15.147775 | 14.488574 | 13.875042 | 13.303379 | 12.272187 |
| 25 | 21.030405 | 16.246963 | 15.495478 | 14.798642 | 14.151699 | 13.550358 | 12.469334 |
| 26 | 21.719611 | 16.622080 | 15.828209 | 15.093945 | 14.413933 | 13.783356 | 12.653583 |
| 27 | 22.398632 | 16.982769 | 16.146611 | 15.375185 | 14.662495 | 14.003166 | 12.825779 |
| 28 | 23.067617 | 17.329586 | 16.451303 | 15.643034 | 14.898100 | 14.210534 | 12.986709 |
| 29 | 23.726717 | 17.663063 | 16.742874 | 15.898127 | 15.121422 | 14.406164 | 13.137111 |
| 30 | 24.376076 | 17.983715 | 17.021889 | 16.141074 | 15.333101 | 14.590721 | 13.277674 |

| n | 8.0% | 9.0% | 10.0% | 12.0% | 14.0% | 16.0% | 18.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 1.925926 | 1.917431 | 1.909091 | 1.892857 | 1.877193 | 1.862069 | 1.847458 |
| 3 | 2.783265 | 2.759111 | 2.735537 | 2.690051 | 2.646661 | 2.605232 | 2.565642 |
| 4 | 3.577097 | 3.531295 | 3.486852 | 3.401831 | 3.321632 | 3.245890 | 3.174273 |
| 5 | 4.312127 | 4.239720 | 4.169865 | 4.037349 | 3.913712 | 3.798181 | 3.690062 |
| 6 | 4.992710 | 4.889651 | 4.790787 | 4.604776 | 4.433081 | 4.274294 | 4.127171 |
| 7 | 5.622880 | 5.485919 | 5.355261 | 5.111407 | 4.888668 | 4.684736 | 4.497603 |
| 8 | 6.206370 | 6.032953 | 5.868419 | 5.563757 | 5.288305 | 5.038565 | 4.811528 |
| 9 | 6.746639 | 6.534819 | 6.334926 | 5.967640 | 5.638864 | 5.343591 | 5.077566 |
| 10 | 7.246888 | 6.995247 | 6.759024 | 6.328250 | 5.946372 | 5.606544 | 5.303022 |
| 11 | 7.710081 | 7.417658 | 7.144567 | 6.650223 | 6.216116 | 5.833227 | 5.494086 |
| 12 | 8.138964 | 7.805191 | 7.495061 | 6.937699 | 6.452733 | 6.028644 | 5.656005 |
| 13 | 8.536078 | 8.160725 | 7.813692 | 7.194374 | 6.660292 | 6.197107 | 5.793225 |
| 14 | 8.903776 | 8.486904 | 8.103356 | 7.423548 | 6.842362 | 6.342334 | 5.909513 |
| 15 | 9.244237 | 8.786150 | 8.366687 | 7.628168 | 7.002072 | 6.467529 | 6.008062 |
| 16 | 9.559479 | 9.060688 | 8.606080 | 7.810864 | 7.142168 | 6.575456 | 6.091578 |
| 17 | 9.851369 | 9.312558 | 8.823709 | 7.973986 | 7.265060 | 6.668497 | 6.162354 |
| 18 | 10.121638 | 9.543631 | 9.021553 | 8.119630 | 7.372859 | 6.748704 | 6.222334 |
| 19 | 10.371887 | 9.755625 | 9.201412 | 8.249670 | 7.467420 | 6.817848 | 6.273164 |
| 20 | 10.603599 | 9.950115 | 9.364920 | 8.365777 | 7.550369 | 6.877455 | 6.316241 |
| 21 | 10.818147 | 10.128546 | 9.513564 | 8.469444 | 7.623131 | 6.928841 | 6.352746 |
| 22 | 11.016803 | 10.292244 | 9.648694 | 8.562003 | 7.686957 | 6.973139 | 6.383683 |
| 23 | 11.200744 | 10.442425 | 9.771540 | 8.644646 | 7.742944 | 7.011326 | 6.409901 |
| 24 | 11.371059 | 10.580207 | 9.883218 | 8.718434 | 7.792056 | 7.044247 | 6.432120 |
| 25 | 11.528758 | 10.706612 | 9.984744 | 8.784316 | 7.835137 | 7.072627 | 6.450949 |
| 26 | 11.674776 | 10.822580 | 10.077040 | 8.843139 | 7.872927 | 7.097092 | 6.466906 |
| 27 | 11.809978 | 10.928972 | 10.160945 | 8.895660 | 7.906077 | 7.118183 | 6.480429 |
| 28 | 11.935165 | 11.026580 | 10.237223 | 8.942554 | 7.935155 | 7.136364 | 6.491889 |
| 29 | 12.051078 | 11.116128 | 10.306567 | 8.984423 | 7.960662 | 7.152038 | 6.501601 |
| 30 | 12.158406 | 11.198283 | 10.369606 | 9.021806 | 7.983037 | 7.165550 | 6.509831 |

# فهرست منابع و مآخذ


اصغرپور، محمدجواد، **برنامه‌ریزی خطی**، دانشگاه الزهرا، ۱۳۶۳

پترویچ دوموریاد، الکساندر، **در قلمرو ریاضیات**، پرویز شهریاری (مترجم) امیرکبیر، ۱۳۴۸

تقوی، مهدی، **مقدمه‌ای بر تجزیه و تحلیل اقتصاد میکرو**، مؤسسه‌ی عالی علوم سیاسی و امور حزبی، ۱۳۵۴

جلیلی، میرزا، فرشید مین باشیان، **ریاضیات جدید**، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۶۷

دانش نارونی، غلامرضا، میرزا جلیلی، **ریاضیات جدید**، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۷۲

رودلف مک‌شین، آن‌کاتلر، **روش سریع تراختنبرگ در حساب**، محمد باقری، (مترجم) دانشمند، ۱۳۷۱

قربانی، ابوالقاسم، **جبر**، چاپخانه‌ی آرین، ۱۳۶۶

مصاحب، غلامحسین، **تئوری مقدماتی اعداد**، سروش، ۱۳۵۸

مولوی،رضا،**نظریه و مسائل ماتریس‌ها**،انتشارات میلاد، تهران،۱۳۷۴

وبر، اجین، **تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی**، حسین علی‌پور کاظمی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۳۶۷

حافظی نسب، مصطفی، **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت**، نشر آروین، ۱۳۷۷

جوادی، حسین، مصطفی، حافظی نسب، **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت**، انتشارات اندرز، ۱۳۷۵

Gosling,"maths for Business and Finance" ,1995 , Pascal Press